

シャボン玉とシャボン膜の数学

拡がりゆく数学 in 千葉

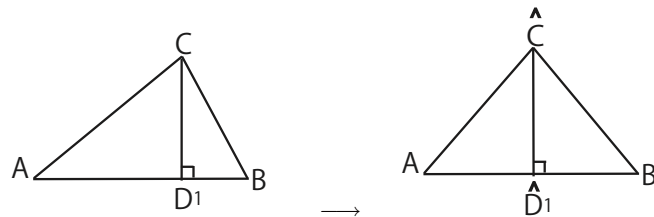
2012年6月17日(日)

小磯深幸 (九州大学 マス・フォア・インダストリ研究所)

- 目次：1. シャボン玉はなぜ丸いか? 2. シャボン膜の数学
3. 自然現象解明への応用 4. 補遺

1

【シュタイナー対称化 (三角形の場合で、最も単純な場合)】



$$CD_1 = \hat{C}\hat{D}_1, \quad A\hat{D}_1 = B\hat{D}_1 \quad (\text{すなわち, } A\hat{C} = B\hat{C})$$

とする。この時、

$$\triangle ABC \text{ の面積} = \triangle A\hat{B}\hat{C} \text{ の面積}$$

$$AC + BC \geq A\hat{C} + B\hat{C}, \quad \text{等号成立} \iff \triangle ABC \equiv \triangle A\hat{B}\hat{C}$$

3

1 シャボン玉はなぜ丸いか?

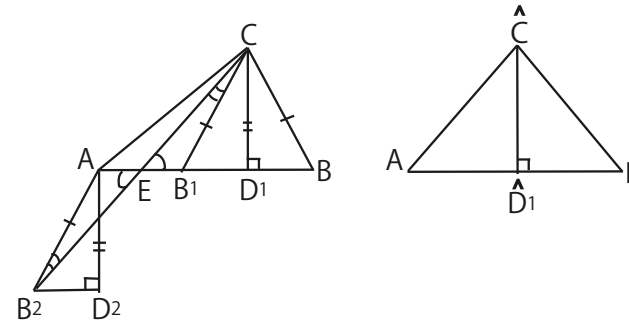
シャボン玉はなぜ丸いのでしょうか? シャボン膜は非常に薄いので重さを無視することになると、シャボン玉に働く力は表面張力のみとなる。表面張力は表面積に比例すると考えられ、シャボン玉は表面張力ができるだけ小さい形をとろうとする。したがって、私達が解くべき問題は、
問題 1.0.1 (等周問題). V は正の数とする。囲む体積が V の閉曲面の中で、面積最小のものを求めよ。

1.1 平面におけるシュタイナー (Steiner) 対称化

この節では、「シュタイナー対称化」と呼ばれる方法を平面内で説明する。それを使って、次節で等周問題の解が球面であることを証明する。

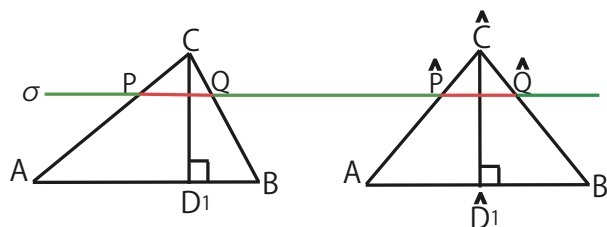
2

証明：



E, B_1, B_2 を、 $ED_1 = A\hat{D}_1, B_1D_1 = BD_1, AB_2 \parallel CB_1$ となるようにとる。すると、 $AE = EB_1$ より $\triangle AB_2E \equiv \triangle B_1CE$ 。故に、 $AB_2 = CB_1, EB_2 = EC = A\hat{C}$ 。故に、 $A\hat{C} + B\hat{C} = B_2C \leq AC + AB_2 = AC + BC$ 。

4



【言い換え】

AB に平行なすべての直線 σ (上図) に対し,

$PQ = \hat{P}\hat{Q}$ であり, $\hat{C}\hat{D}_1$ が $\hat{P}\hat{Q}$ を二等分する
ように $\triangle ABC\hat{C}$ を作る. この時,

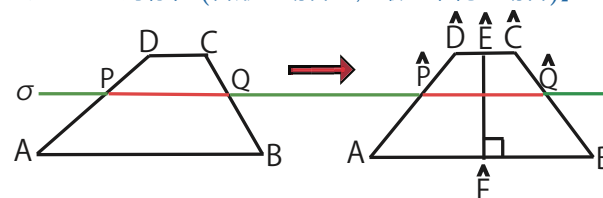
$$\triangle ABC \text{ の面積} = \triangle ABC\hat{C} \text{ の面積}$$

$\triangle ABC$ の三辺の長さの和 $\geq \triangle ABC\hat{C}$ の三辺の長さの和

等号成立 $\iff \triangle ABC\hat{C}$ は $\triangle ABC$ と一致する.

5

【シュタイナー対称化 (台形の場合で, 最も単純な場合)】



AB に平行なすべての直線 σ (上図) に対し,

$PQ = \hat{P}\hat{Q}$ であり, $\hat{E}\hat{F}$ が $\hat{P}\hat{Q}$ を二等分する
ように 台形 $ABC\hat{C}\hat{D}$ を作る. この時,

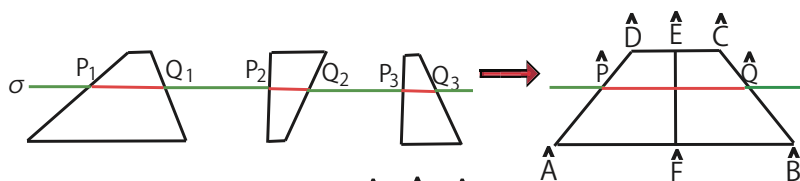
$$\text{台形 } ABCD \text{ の面積} = \text{台形 } ABC\hat{C}\hat{D} \text{ の面積}$$

台形 $ABCD$ の周長 \geq 台形 $ABC\hat{C}\hat{D}$ の周長

等号成立 \iff 台形 $ABC\hat{C}\hat{D}$ は台形 $ABCD$ と一致する.

6

【シュタイナー対称化 (有限個の台形の場合)】



AB に平行なすべての直線 σ (上図) に対し,

$P_1Q_1 + P_2Q_2 + \dots + P_nQ_n = \hat{P}\hat{Q}$ であり, $\hat{E}\hat{F}$ が $\hat{P}\hat{Q}$ を二等分する
ように 台形 $\hat{A}\hat{B}\hat{C}\hat{D}$ を作る. この時,

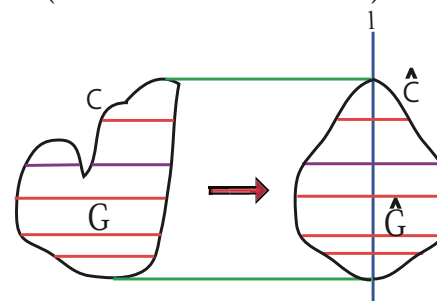
もとの n 個の台形の面積の和 = 台形 $\hat{A}\hat{B}\hat{C}\hat{D}$ の面積

もとの n 個の台形の周長の和 \geq 台形 $\hat{A}\hat{B}\hat{C}\hat{D}$ の周長

等号成立 $\iff n = 1$, かつ台形 $\hat{A}\hat{B}\hat{C}\hat{D}$ はもとの台形の平行移動

7

【シュタイナー対称化 (一般の閉曲線の場合)】 下図のように, 閉曲線 C を \hat{C} にうつす (厳密な定義と結果は次ページ) と,



$$G \text{ の面積} = \hat{G} \text{ の面積}$$

C の長さ $\geq \hat{C}$ の長さ, 等号成立 $\iff C \equiv \hat{C}$

8

シュタイナー対称化は、最も単純で応用のある「対称化法」の一つであり、ヤコブ・シュタイナー (独, 1796-1863) によって考え出された。

C は平面内の自己交差の無い閉曲線, G は C が囲む閉領域とする。直線 l に対し, C の Steiner 対称化 \hat{C} は, 次の (I), (II) を満たす閉曲線。

(I) \hat{C} は l について対称である。

(II) \hat{C} が囲む閉領域を \hat{G} とする。 l に垂直な任意の直線 σ に対し, $\sigma_1 := \sigma \cap \hat{G}$ は, 次の (II-a), (II-b) を満たす線分である。ただし, 空集合, 孤立点は, 長さ 0 の線分とみなす。

(II-a) σ_1 は l について対称である。

(II-b) σ_1 の長さは, $\sigma \cap G$ の長さとも一致する。

定理 1.1.1. G の面積を $A(G)$, C の長さを $L(C)$ で表すと,

(i) $A(G) = A(\hat{G})$. (ii) $L(C) \geq L(\hat{C})$. 等号は C が \hat{C} の平行移動の時。

次に, 二直線 l_1, l_2 を, それらの成す角 θ について, θ/π が無理数となる (有理数でない) ようにとる。 C_2 の l_1 に関する Steiner 対称化を C_3 とし, C_3 の l_2 に関する Steiner 対称化を C_4 とし, C_4 の l_1 に関する Steiner 対称化を C_5 とし, と, 次々に Steiner 対称化を行って, 凸閉曲線の列 $C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, \dots, C_n, \dots$ を得る。これらの閉曲線はすべて同じ面積 A を囲み, 長さについては,

$$L(C) \geq L(C_2) \geq L(C_3) \geq \dots$$

n を限りなく大きくする時, C_n は面積 A を囲む凸閉曲線 C_∞ に収束し,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L(C_n) = L(C_\infty)$$

が成り立つことが証明できる (証明は容易ではない)。したがって, $L(C) \geq L(C_\infty)$ で, 等号は C が円である時に限り成り立つ。 \square

1.2 シャボン玉はなぜ丸いか?

まず, 平面における等周問題について考えよう。

定理 1.2.1. 同じ面積を囲む閉曲線の中で長さ最小のものは, 円である。

証明の概略 C は面積 A を囲む閉曲線とする。 C の y 軸についての Steiner 対称化を C_1 とし, 次に, C_1 の x 軸についての Steiner 対称化を C_2 とすると, 定理 1.1.1 により, C_1, C_2 は共に面積 A を囲み,

$$L(C) \geq L(C_1) \geq L(C_2)$$

が成り立つ。 C_2 は, x 軸についても, y 軸についても対称な凸曲線である。

【空間内の Steiner 対称化】 (空集合, 孤立点は, 長さ 0 の線分とみなす。)

S は空間内の自己交差の無い閉曲面, G は S が囲む閉領域とする。 平面 P に対し, S の Steiner 対称化 \hat{S} は, 次の (I), (II) を満たす閉曲面。

(I) \hat{S} は P について対称である。

(II) \hat{S} が囲む閉領域を \hat{G} とする。 P に垂直な任意の直線 σ に対し, $\sigma_1 := \sigma \cap \hat{G}$ は, 次の (a), (b) を満たす線分である。

(a) σ_1 は l について対称。 (b) σ_1 の長さは, $\sigma \cap G$ の長さとも一致。

定理 1.2.2. G の体積を $V(G)$, S の面積を $A(S)$ で表すと,

(i) $V(G) = V(\hat{G})$. (ii) $A(S) \geq A(\hat{S})$. 等号は S が \hat{S} の平行移動の時。

これを使って, 「シャボン玉が丸い」ことが証明できる! すなわち,

定理 1.2.3. 球面は, 同じ体積を囲む閉曲面の中で面積最小である。

2 シャボン膜の数学

2.1 シャボン膜の数学への序 — シャボン膜と極小曲面 —

針金を使って曲線の枠を作り，石鹼液の中にひたしてからそっと引き上げてみよう．すると，針金枠に石鹼の膜が張る．このような，石鹼膜がモデルとなる数学概念は，極小曲面と呼ばれている．

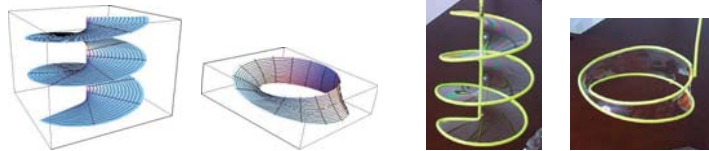


図 1. 常らせん面 (左) とメビウスの帯型極小曲面 (右. 表裏の区別の無い曲面)

13

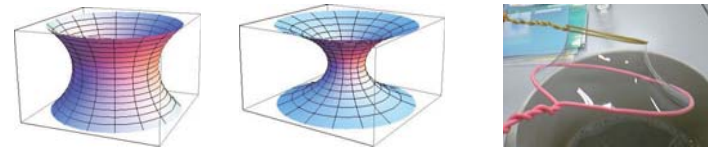


図 3. 懸垂面 (左端と中央) と石鹼膜 (右端)

- 石鹼膜 \longleftrightarrow 表面張力極小 (物理)
- \longleftrightarrow 同じ枠を張る曲面のうちで面積極小
- \longleftrightarrow 極小曲面 (数学)
- \longleftrightarrow 平均曲率 0 (数学)
- \longleftrightarrow 膜の内側と外側での圧力差 = 0 (物理)

14



図 4. 同じ針金枠を張る 2 種類の石鹼膜 (どちらも向き付け可能)



図 5. 同じ針金枠を張る石鹼膜
(左: 向き付け可能, 右: メビウスの帯型, 向き付け不可能)

15

閉曲線 Γ に対して，それで張られる極小曲面の一意性は一般には成立しないし，解の個数が有限個であるかどうかすら明らかでない．

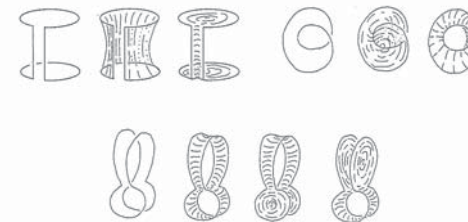


図 6. 上図: 2 種類の極小曲面を張る閉曲線の例
下図: 3 種類の極小曲面を張る閉曲線の例

16

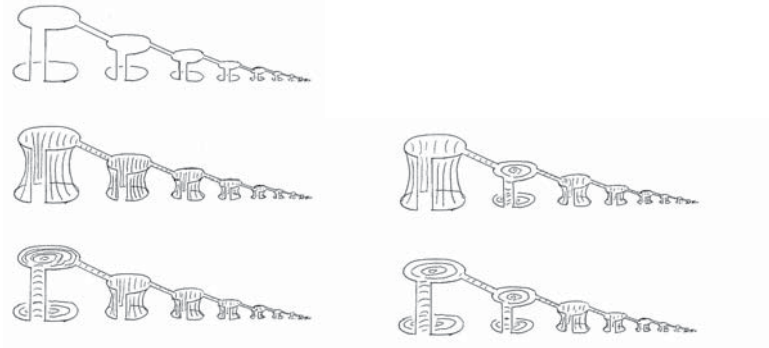


図7. モンスター曲線：無限個の極小曲面を張る閉曲線

Cornu らせん (図9) 上の各点における曲率 (の絶対値) は、原点からその点までの曲線の長さに比例する。一定の早さでハンドルをきりながら一定の速度で走る車が描く軌道は **Cornu らせん** となる。この性質により、**Cornu らせん** は高速道路のカーブの設計に用いられ、ハンドルを滑らかに回して曲線区間を走行することができるようにするのに役立っている。また、**Cornu らせん** はジェットコースターのカーブの設計にも応用され、乗客の乗り心地や安全性のために役立っている。

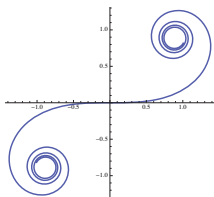


図9. Cornu らせん

2.2 平面曲線の曲率

P を曲線 C の1点とする。 C 上の P の両側に、2点 Q, R をとる。 P, Q, R を含む円の半径を $r(Q, R)$ とする。 Q, R を P に近づけたときの $1/r(Q, R)$ の極限値を、曲線 C の点 P における**曲率**といい、 $k(P)$ で表す。 点 P で C に接する半径 $1/k(P)$ の円を、 C の P での**曲率円**という。 $k(P)$ は、 C の接線の角度の、長さに対する瞬間変化率と一致。

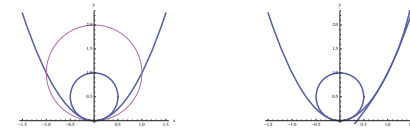


図8. 放物線 $y = x^2$ と曲率円

例 2.2.1. 直線の曲率は 0, 半径 $r > 0$ の円の曲率は、 $1/r$ である。

Cornu らせんの媒介変数表示

$$x(s) = \int_0^s \cos\left(\int_0^t (au + b)du + \theta_0\right) dt + c_1$$

$$y(s) = \int_0^s \sin\left(\int_0^t (au + b)du + \theta_0\right) dt + c_2$$

$b = \theta_0 = c_1 = c_2 = 0$ の時の図が図10：原点からの距離が s の点における曲率 $= as$ (a は定数)。

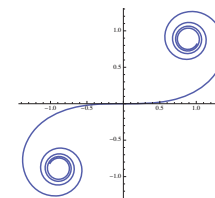


図10. Cornu らせん

2.3 曲面の平均曲率 — 極小曲面と平均曲率一定曲面 —

石けん膜は、表面張力の作用により、できるだけ表面積が小さい形をとろうとする。

シャボン玉の膜の場合は、一定の体積の空気を包んでいるので、その体積を囲む曲面の中で面積ができるだけ小さい形となる。

このような性質は、曲面の曲がり具合を表す平均曲率と呼ばれる量によって表すことができる。

石鹸膜 \longleftrightarrow 極小曲面 \iff 平均曲率が至る所 0

シャボン玉 \longleftrightarrow 平均曲率一定曲面 \iff 平均曲率が至る所一定

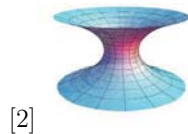
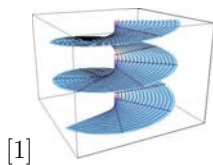
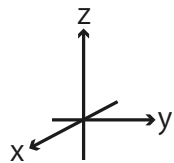
2.4 極小曲面の例

この節では極小曲面の例をあげ、前節で説明した極小曲面の曲がり具合についての性質が成り立っていることを見よう。

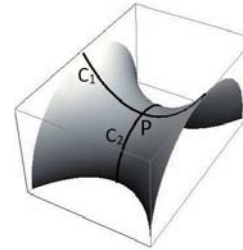
[1] 常らせん面 (helicoid)

[2] 懸垂曲面 (catenoid)

$$x = u \cos v, y = u \sin v, z = kv \quad \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{a}{2}(e^{z/a} + e^{-z/a}), (a > 0)$$



平均曲率：曲面 S 上の点 P (図 11) において、 P における S の法線を含む互いに直交する二つの平面で S を切った時の切り口となる曲線 (図 11 の C_1 と C_2) の、 P での曲率の平均を、 S の P での平均曲率という。



C^∞ 級関数 $f : D(\subset \mathbf{R}^2) \rightarrow \mathbf{R}$ のグラフ

$$X(u_1, u_2) = (u_1, u_2, f(u_1, u_2))$$

の平均曲率 H は、

$$\frac{(1 + (f_{u_2})^2)f_{u_1u_1} - 2f_{u_1}f_{u_2}f_{u_1u_2} + (1 + (f_{u_1})^2)f_{u_2u_2}}{2((f_{u_1})^2 + (f_{u_2})^2 + 1)^{3/2}}$$

図 11. 曲面の平均曲率の説明図

[3] シャークの極小曲面

[4] エネパーの極小曲面

$$z = \log_e \left(\frac{\cos y}{\cos x} \right)$$

$$x = u - \frac{u^3}{3} + uv^2, y = -v + \frac{v^3}{3} - u^2v, z = u^2 - v^2$$

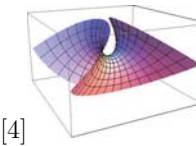
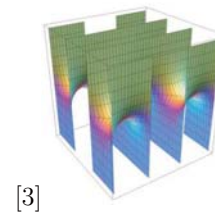


図 12. いろいろな極小曲面

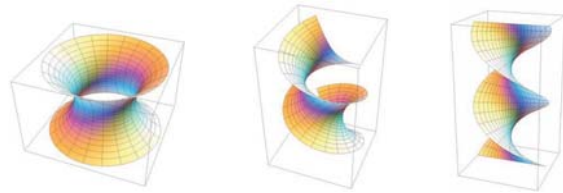


図 13. 懸垂面 (左) から常らせん面 (右) へ. 伸び縮みなしの変形.
第 1 基本形式 (Riemann 計量) がすべて同じ.

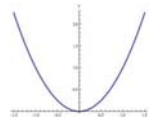


図 14. 円で構成される極小曲面: 懸垂面 (左) とリーマンの極小曲面 (右).

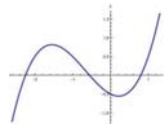
2.5 極小曲面を研究する方法の一端

まず, 簡単な場合から, 「最小値」について考えてみよう.

例 2.5.1. $y = x^2$ のグラフ (放物線).



例 2.5.2. $y = \frac{1}{2}(x^3 + 2x^2 - x - 1)$ のグラフ.



例 2.5.3. $y = \frac{1}{50}(x^4 + 8x^3 + 8x^2 + 8x + 3)$ のグラフ.

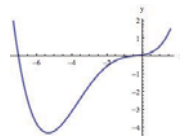


図 15. 三重周期極小曲面の例: 左から, シュワルツ D 曲面, シュワルツ P 曲面, ジャイロイド. ナノスケール物質の構造として現れる.

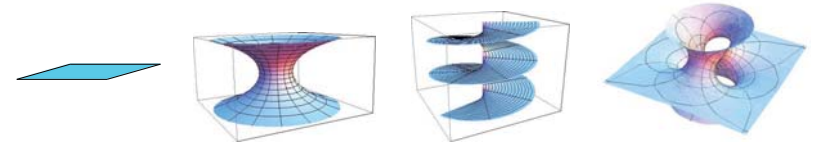
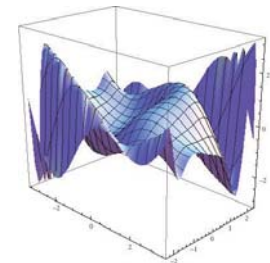


図 16. 自己交差をもたない完備で有限 topology な極小曲面の例: 平面, 懸垂曲面, 常らせん面 (19 世紀までに発見), コスタ曲面 (1984 年発見).

例 2.5.4. $z = \left(1 + \frac{3xy}{10}\right) \sin\left(x + \frac{y^3}{2}\right)$ のグラフ.



ではいよいよ, 空間内の閉曲線 Γ を張る面積最小曲面について考えよう. Γ を張る曲面全体の成す集合を S とおく. S は無限次元の集合である! (直線は 1 次元, 平面は 2 次元)
 S に含まれる曲面 X に対し, X の面積を $A(X)$ で表そう. A のような「無限次元空間上で定義された『関数』」を汎関数と呼ぶ.

【無限次元空間上の関数の極値問題】

「最適な形」(自然現象でも物作りでも!)を求めるために重要!

極大, 極小, 最大, 最小はどこか?

極大極小, 最大最小 \implies 接線(接平面)が水平 \iff 関数の微分 = 0

しかし,

「接線(接平面)が水平 \implies 極大極小, 最大最小」とは限らない.

そこで,

微分 = 0 かつ 2回微分 > 0 \implies 極小

注意 §1 では, このような方法ではなく, 最小値を直接求めた.

3.2 ナノスケール物質の構造解明への極小曲面の応用

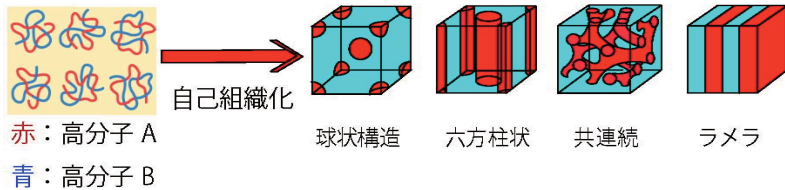


図 17. AB ブロック共重合体の自己組織化



図 18. ジャイロイド(左),シュワルツD曲面(中),シュワルツP曲面(右)

3 自然現象解明への応用

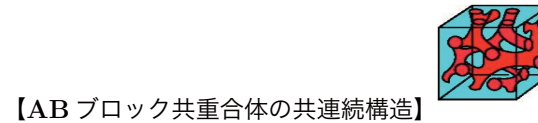
3.1 細い管から垂れ下がる液体

「同じ体積を囲む曲面」の中で,

「面積 + 囲む液体の重力エネルギー」が最小である形をとる.



平均曲率 H が, $H(z) = az + b$, (z は高さ. a, b は定数), をみたす曲面になる. この性質は, 液体の表面張力の測定に有用である.



ジャイロイド(左),シュワルツD曲面(中),シュワルツP曲面(右)

シュワルツP及びD曲面は, H.A.Schwarzが19世紀に発見. ジャイロイドはA.Schoenが1970年に発見. ABブロック共重合体の共連続構造は, シュワルツP曲面の構造を持つと考えられていたが, 実はその多くがジャイロイドの構造を持つということが判明した(1980年代)のは, ジャイロイドの数学的な発見によるところが大きい!

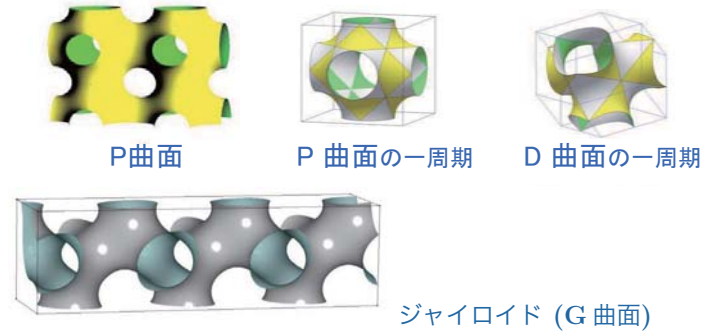


図 19. 三重周期極小曲面の例. ナノ物質の構造として現れる.
(左上図以外の図の出典: A. Ros, *Interfaces and Free Boundaries* 9, 2007.)

3.3 ナノ・ミクロ現象解明への平均曲率一定曲面の応用

§1 で、「シャボン玉は丸い(球面である)」ことを証明した。球面は対称性の最も高い形である。ところが、近年、ナノあるいはミクロスケールの液体やソフトマターの物質が、自然に予測されるよりも不均衡な(対称性の低い)形状を成すことがしばしば観察されている。(1 ナノメートル = 10^{-9} メートル。) また、このようなスケールの物質に関する実験は、容易ではないことがある。

このような現象を数学の一般論を応用して解明することができれば、有意義である。しかし、一般論を個々の具体的な問題に適用するのは、しばしば困難である。計算機援用が有用な場合や、§1 で説明した対称化を用いて回転面に帰着できる場合がある。以下に未解決問題の例をあげる。

Schwarz D 曲面は, (u, v) 平面上の関数 $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ を成分とする点 $(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ の集合として, 次のように表される。

$$\begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} \left\{ \int_{w_0}^w \frac{1}{2}(1 - g(\zeta)^2) f(\zeta) d\zeta \right\} \\ \operatorname{Re} \left\{ \int_{w_0}^w \frac{\sqrt{-1}}{2}(1 + g(\zeta)^2) f(\zeta) d\zeta \right\} \\ \operatorname{Re} \left\{ \int_{w_0}^w f(\zeta) g(\zeta) d\zeta \right\} \end{pmatrix} \quad (1)$$

ただしここで, $w = (u, v) = u + \sqrt{-1}v$ であり, w_0 は (u, v) 平面上の定点である. $f(w)$ と $g(w)$ は複素変数 $w = u + \sqrt{-1}v$ の関数

$$f(w) = (1 - 14w^4 + w^8)^{-1/2}, \quad g(w) = w$$

で, (1) の右辺の積分は複素積分. P, G 曲面も類似の形で表される. (1) を Weierstrass-Enneper の公式と呼び, 極小曲面の例の構成に有用。

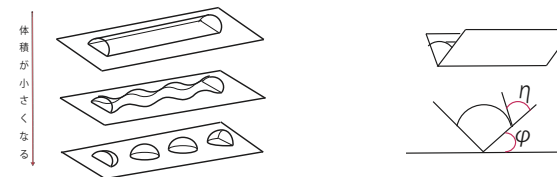
例 3.3.1 Lenz-Fenzl-Lipowsky('01):幅 1mm の銅製の円環上の液体



(錫と鉛の合金を融かす)
体積が小さい時は回転体, 体積が大きくなると回転体ではなくなる。

例 3.3.2 パラメータ (例えば体積や濡れエネルギー係数) の連続的な変化に対して不連続に変化する (位相型が変わる) 安定解の記述。

(A) 板の上の液体 (B) 溝の中の液体



4 補遺

定理 1.1.1 の証明 平面に直交座標系 (x, y) を入れ, ℓ は y 軸と一致すると仮定しても一般性を失わない. 実数 y_0 に対し, 直線 $y = y_0$ を $\sigma(y_0)$ で表す. また, G の点の y 座標の最小値, 最大値を, それぞれ a, b で表す.

$y \in (a, b)$ に対し, $\sigma(y) \cap \hat{G}$ は線分 $\{(x, y); -\hat{x}(y) \leq x \leq \hat{x}(y)\}$ である. ここで, $\hat{x}(y)$ は y によって決まる正の数である.

一方, $\sigma(y) \cap G$ は有限個の線分の和集合

$$\sigma(y) \cap G = I_1 \cup I_2 \cup \cdots \cup I_\mu$$

となる. ここで,

$$I_1 = \{(x, y); x_1 \leq x \leq x_2\}, I_2 = \{(x, y); x_3 \leq x \leq x_4\}, \dots,$$

37

が成り立つ. すなわち, (i) が示せた.

長さについては,

$$L(C) = \int_a^b \sum_{j=1}^{2\mu} \sqrt{1 + \left(\frac{dx_j}{dy}\right)^2} dy, \quad L(\hat{C}) = 2 \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{d\hat{x}}{dy}\right)^2} dy$$

が成り立つ. ベクトル $v_1, \dots, v_{2\mu}, v^*$ を次のように定義する.

$$v_1 := (1, -x'_1), v_2 := (1, x'_2), \dots, v_{2\mu-1} := (1, -x'_{2\mu-1}), v_{2\mu} := (1, x'_{2\mu}),$$

$$v^* := v_1 + \cdots + v_{2\mu}, \quad (\text{" ' " は } y \text{ についての微分})$$

$$v^* = (2\mu, 2\hat{x}') = 2(\mu, \hat{x}')$$

39

$$I_\mu = \{(x, y); x_{2\mu-1} \leq x \leq x_{2\mu}\},$$

$$x_1 \leq x_2 < x_3 \leq x_4 < \cdots < x_{2\mu-1} \leq x_{2\mu}$$

である. ただし, μ, x_j は y に依存して定まる数である.

(II-b) より,

$$\hat{x}(y) = \frac{1}{2} \{(x_2 - x_1) + (x_4 - x_3) + \cdots + (x_{2\mu} - x_{2\mu-1})\}$$

が成り立つ.

$A(G), A(\hat{G}), L(C), L(\hat{C})$ を計算する. 以下の計算において, 各積分は, μ が定数であるような y の範囲での積分の和を意味する.

面積については,

$$A(G) = \int_a^b \{(x_2 - x_1) + (x_4 - x_3) + \cdots + (x_{2\mu} - x_{2\mu-1})\} dy = \int_a^b 2\hat{x} dy = A(\hat{G})$$

38

が成り立つので,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{2\mu} (1 + (x'_j)^2)^{1/2} &= \sum_{j=1}^{2\mu} |v_j| \geq \left| \sum_{j=1}^{2\mu} v_j \right| = |v^*| = 2(\mu^2 + (\hat{x}')^2)^{1/2} \\ &\geq 2(1 + (\hat{x}')^2)^{1/2} \end{aligned}$$

となる. ここで, すべての等号が成り立つための必要十分条件は,

$\mu = 1$ かつ $v_1 = v_2$ である. $v_1 = v_2$ は $-x'_1 = x'_2$ を意味するから, ある定数 a に対して $x_2(y) = -x_1(y) + a$ が成り立つ. すなわち, C は直線 $x = (1/2)a$ に対して対称である. 以上より, $L(C) \geq L(\hat{C})$ であり, 等号成立は, C が直線 $x = \text{定数}$ について対称の時である. \square

40