サイン・コサインとレーザー走査型プロジェクター

ー 知財（特許）を出願した数式と曲線たち ー

光走査装置とそれに用いる光学反射素子

特願　２０１１－１１０７７５（２０１１／５／１７）

パナソニックエレクトロニックデバイス株式会社 と共同出願

外国出願：することになりました

池　田　　勉

龍谷大学理工学部数理情報学科

レーザー走査型プロジェクター

レーザー走査型プロジェクターとは

ミラーでレーザー光を反射し，スクリーンを走査させる

レーザー走査型プロジェクターの特徴

超小型，低消費電力，高輝度・低発熱，斜め投影・曲面投影（ピント合せ不要）

レーザー走査型プロジェクターを組み込んだ商品展開

デジカメ内臓プロジェクター

携帯電話内臓プロジェクター

ノートパソコン内臓プロジェクター

自動車内のシアター，カーナビ（フロントガラスの一部をスクリーンに）

Head Mounted Display

環境に優しいプロジェクター・テレビ

液晶プロジェクター・テレビ

ブラウン管テレビ（ＣＲＴ）に比べたら，はるかに，環境に優しい

しかし，真っ暗な画面でも バックライト は煌々と輝いている

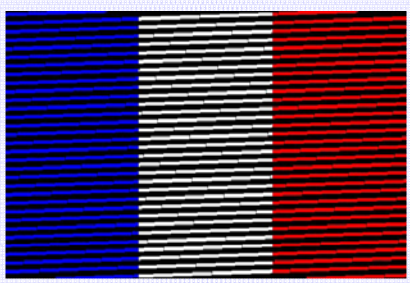
バックライト を煌々と輝かせ，必要に応じて色別の シャッター を開けて映像を表示するのが液晶方式

レーザー走査型プロジェクター

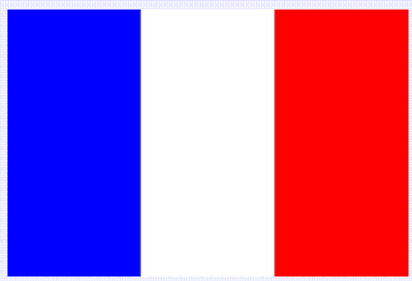
電力が消費されるのは，レーザーが当たっているところだけ：

低消費電力，熱くならないプロジェクター

従来の走査方式：
Raster scan 方式（のこぎり波）



横方向 1,170 Hz（saw wave）
概念図（線の太さ 5 倍）

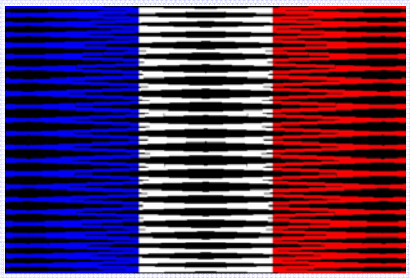


横方向 29,970 Hz（saw wave）

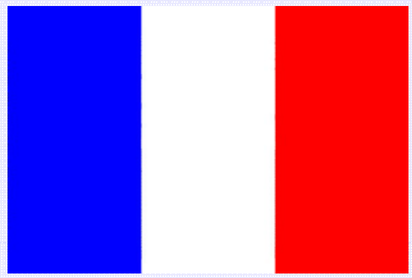
縦方向 60 Hz（sine wave），フレームレート 30（1/30 秒で描画完成）
上下左右 10 % カット（i.e. 全体の 64 % のスペース， 35 % の時間を使用）

従来の走査方式：Raster scan 方式（正弦波）

日立の試作品は正弦波による Raster scan 方式 ？



横方向 1,170Hz（sine wave）
模式図（線の太さ 5 倍）



横方向 29,970 Hz（sine wave）

縦方向 60 Hz（sine wave），フレームレート 30（1/30 秒で描画完成）
上下左右 10 % カット（i.e. 全体の 64 % のスペース， 35 % の時間を使用）

Raster scan 方式と Lissajous scan 方式

日立の試作品は正弦波による Raster scan 方式 ？

Raster scan 方式 ：高網羅率，駆動周波数が低い（60 Hz）

駆動周波数が低い（60 Hz） ➡ 機械的強度に劣る，外乱振動に弱い

Panasonic は Lissajous 図形の利用を考えた

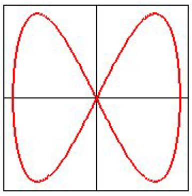
Lissajous scan 方式 ：駆動周波数が高い（1,000 Hz 程度），実績が少ない

機械的強度に優れ，外乱振動に強い

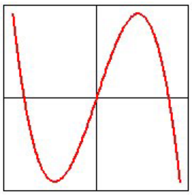
実績が少ない（一定以上の網羅率の確保が必要）

➡ 横方向，縦方向の駆動周波数の決定方法の研究が必要
温度などの環境変動に対応するため，自動決定方式が必要

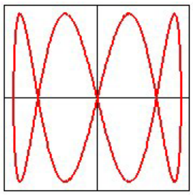
いろいろな Lissajous 図形



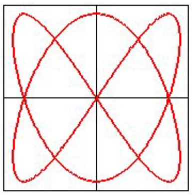
$$\begin{cases} x(t) = \sin 2\pi t \\ y(t) = \sin 4\pi t \end{cases}$$



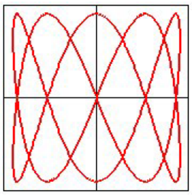
$$\begin{cases} x(t) = \sin 2\pi t \\ y(t) = \sin 6\pi t \end{cases}$$



$$\begin{cases} x(t) = \sin 2\pi t \\ y(t) = \sin 8\pi t \end{cases}$$



$$\begin{cases} x(t) = \sin 4\pi t \\ y(t) = \sin 6\pi t \end{cases}$$



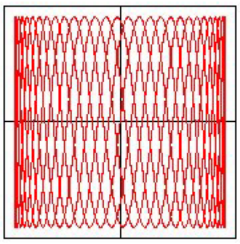
$$\begin{cases} x(t) = \sin 4\pi t \\ y(t) = \sin 10\pi t \end{cases}$$

電気通信大学の校章
50 Hz – 60 Hz

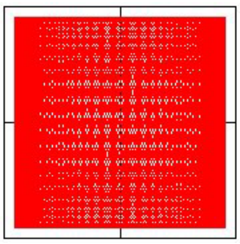
もっと速く振動させたら？

$$\begin{cases} x(t) = \sin 2\pi m t \\ y(t) = \sin 2\pi n t \end{cases}$$

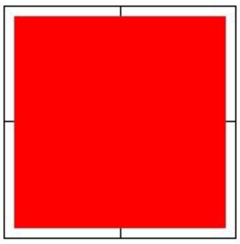
m, n を大きく，上手に選んだら？



$$\begin{cases} x(t) = \sin 2\cdot 7\pi t \\ y(t) = \sin 2\cdot 59\pi t \end{cases}$$



$$\begin{cases} x(t) = \sin 2\cdot 79\pi t \\ y(t) = \sin 2\cdot 271\pi t \end{cases}$$



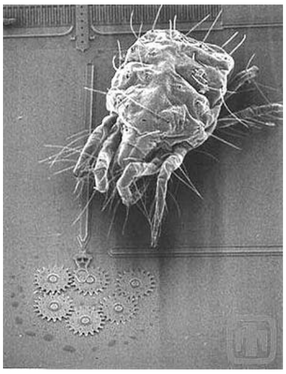
$$\begin{cases} x(t) = \sin 2\cdot 991\pi t \\ y(t) = \sin 2\cdot 11161\pi t \end{cases}$$

Panasonic の技術

MEMS (Micro Electro Mechanical Systems)：
機械要素部品を１つのシリコン基板上に集積したデバイス
（プリンターヘッド，加速度センサー，・・・）

MEMS によって小さな鏡を作り，
高速で正確に振動させる技術

$$\begin{cases} x(t) = \sin 2\pi f_L t \\ y(t) = \sin 2\pi f_H t \end{cases} \qquad f_L \cong 1000\ \mathrm{Hz},\quad f_H \cong 30000\ \mathrm{Hz}$$



MEMS による歯車とダニ
Wikipedia, サンディア国立研究所
http://www.mems.sandia.gov

レーザーをコントロールする技術

レーザーに映像情報を乗せる技術

この技術を利用したプロジェクターを開発したい

Lissajous scan 方式によるレーザー捜査型プロジェクター

Lissajous 図形によるスクリーンのスキャン

数学の立場・商品開発の立場・数理科学の出番

数学の視点からは

$$\begin{cases} x(t) = \sin 2\pi f_L t \\ y(t) = \sin 2\pi f_H t \end{cases}$$

$\dfrac{f_H}{f_L}$ が有理数ならば周期軌道,

無理数ならば正方形を稠密にスキャン

商品開発の立場からは

上記の数学の結果は，時間を無制限に使ったもの，
プロジェクター・テレビは３０分の１秒でスクリーンをスキャンする必要がある

物を作る上では，有理数と無理数の区別は不可能

映像情報は離散的に（デジタル的に）送らざるを得ない

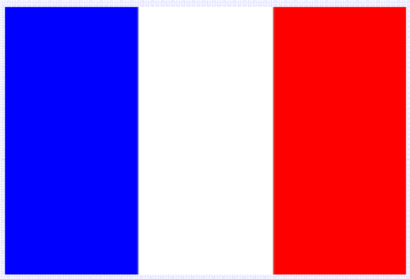
数理科学の出番

商品開発の現場を十分に理解しつつ，精妙な数学的知見を最大限に利用して，
新たな地平を切り開く

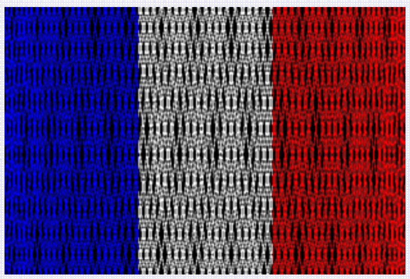
試してみよう ーフランスの国旗ー

映像情報を処理する時間が欲しい → $-0.8 \le x \le 0.8,\ -0.8 \le y \le 0.8$ の部分だけを使う

端は Lissajous 図形がゆがむ

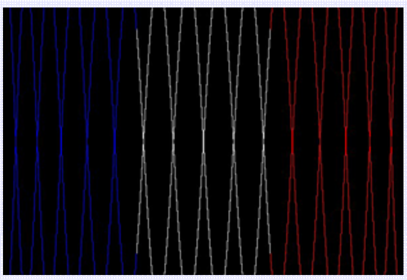


トリコロール（フランスの国旗）



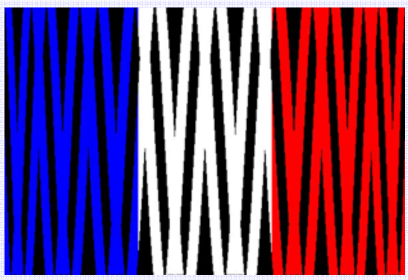
$f_L = 991$ Hz, $f_H = 11161$ Hz

試してみよう ーフランスの国旗ー



$f_L = 1135$ Hz, $f_H = 29510$ Hz

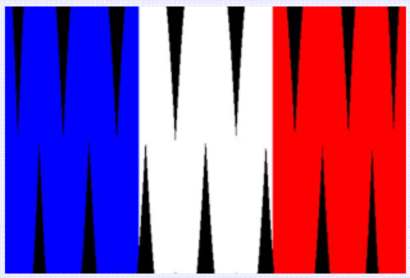
$f_H = 26 f_L$



$f_L = 1135$ Hz, $f_H = 29515$ Hz

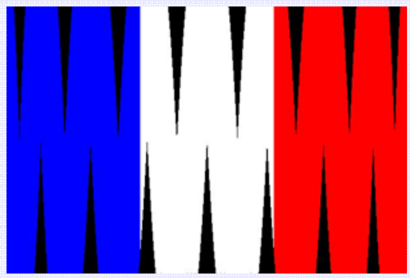
$f_H = 26 f_L + 5$

試してみよう ーフランスの国旗ー



$f_L = 1135$ Hz, $f_H = 29520$ Hz

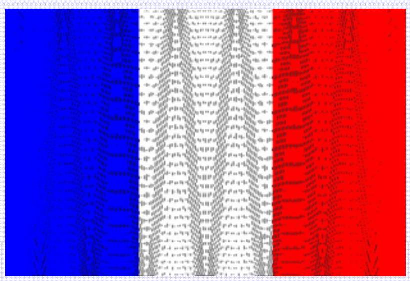
$f_H = 26 f_L + 10$



$f_L = 1135$ Hz, $f_H = 29525$ Hz

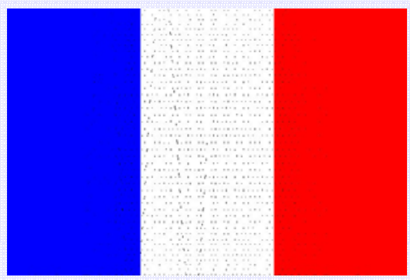
$f_H = 26 f_L + 15$

試してみよう ーフランスの国旗ー



$f_L = 1135$ Hz, $f_H = 29530$ Hz

$f_H = 26 f_L + 20$



$f_L = 1135$ Hz

f_H は知財を出願した数式で計算

$f_H = 29599.605263\cdots$

知財を出願した数式（奇数分割＋方式）

（1）フレームレート（1秒間のコマ数）F_r を決め，f_L を与える

例：$F_r = 30,\ f_L = 1135\ \mathrm{Hz}$

（2）$a_{\max} = \left[\dfrac{1}{4} \left(\dfrac{2f_L}{F_r} - 3 \right) \right]$ を計算する $\left([x] \text{ は } x \text{ を越えない最大の整数} \right)$

例：$a_{\max} = \left[\dfrac{1}{4} \left(\dfrac{2 \cdot 1135}{30} - 3 \right) \right] = [18.166\cdots] = 18$

（3）つぎの条件を満たす整数 $a,\ b$ を選ぶ（特別な場合として $a = b = 0$ も可）

$1 \le a \le a_{\max},\quad |2b| < 2a+1,\ b \ne 0,\ 2a+1$ と $|2b|$ は互いに素

例：$a = 1,\ b = -1,\ 2a+1 = 3$ と $|b| = |-1| = 1$ は互いに素

知財を出願した数式（奇数分割＋方式）

（4）$a,\ b$ がつぎの 2 つの条件を満たすか否かを調べる

$$P = \left[\frac{1}{4(2a+1)} \left(\frac{2f_L}{F_r} + 4b + 1 \right) \right] \ge 1,\quad E_p = \frac{4(2a+1)P - 4b}{1 + \left[\dfrac{2f_L}{F_r} \right]} \ge 0.6$$

例：$P = \left[\dfrac{1}{4(2 \cdot 1 + 1)} \left(\dfrac{2 \cdot 1135}{30} - 4 \cdot 1 + 1 \right) \right] = [6.055\cdots] = 6 \ge 1$

例：$E_p = \dfrac{4(2 \cdot 1 + 1) \cdot 6 + 4 \cdot 1}{1 + \left[\dfrac{2 \cdot 1135}{30} \right]} = \dfrac{72 + 4}{1 + [75.666\cdots]} = \dfrac{76}{1 + 75} = 1 > 0.6$

（5）$f_H = Nf_L + \dfrac{1}{2} \dfrac{2a+1}{(2a+1)P - b} f_L$ とする $(N \text{ は自然数})$

例：$f_H = 26 \cdot 1135 + \dfrac{1}{2} \dfrac{2 \cdot 1 + 1}{(2 \cdot 1 + 1) \cdot 6 + 1} \cdot 1135 = 29599.605263\cdots$

どのように考えて導出した数式か？

正方形の中での Lissajous 図形の挙動を解析するのは容易ではない

Lissajous 図形と y 軸の交わり方に注目

Lissajous 図形が y 軸と，

“均一に”，“偏りのない順番で”

交わるための条件を追求した

数理科学のアドバンテージ

科学技術の進歩に対応可能（高い汎用性）．
フレームレートが大きくなっても，使える数式
低速側周波数・高速側周波数が大きくなっても，使える数式

縮約は数理的思考を活性化させる

$$\begin{cases} x(t) = \sin 2\pi f_L t \\ y(t) = \sin 2\pi f_H t \end{cases} \quad (0 \le t \le \frac{1}{F_r}) \qquad f_L \cong 1000 \text{ Hz}, \quad f_H \cong 30000 \text{ Hz}$$

Lissajous 曲線が長方形領域を

“隙間なく”，“均一に”，“目にやさしく”

埋め尽くすならば，Lissajous 曲線は y 軸と

“均一に”，“偏りのない順番で”

交わるであろう

$F_r = 30$, $f_L = 1135$ Hz のとき，交点の個数は約 76 個，表示範囲に含まれるのは 45 個．これが均一に偏りのない順番で現れるよう数理で頑張る．

Lissajous 曲線と y 軸との交叉時刻 $t_n = \dfrac{n}{2f_L}$

交点 $(0, \sin\theta_n)$ の位相 $\theta_n = 2\pi f_H t_n = n\dfrac{f_H}{f_L}\pi$ $\quad \left(n = 0,1,2,\cdots,\left[\dfrac{2f_L}{F_r}\right]\right)$