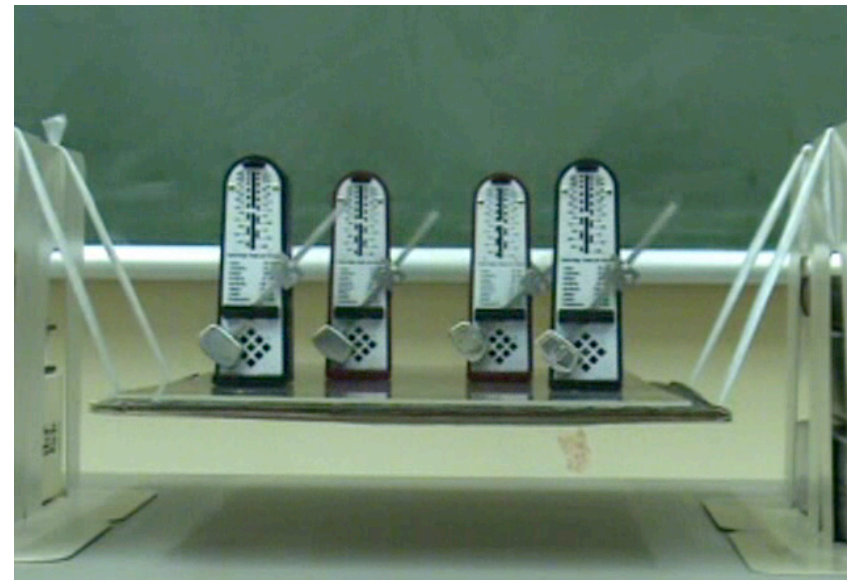
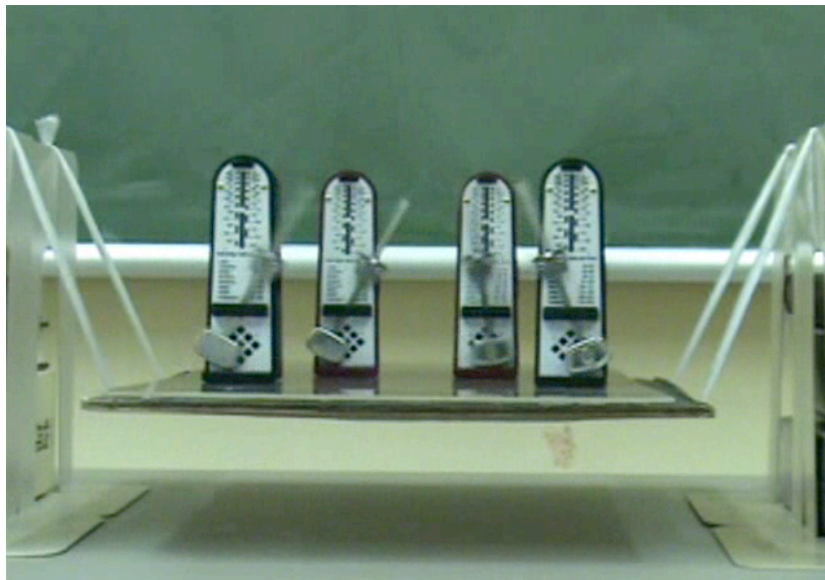


# 数学で読み解く生物リズムとカオス



お茶の水女子大学  
JST さきがけ兼任

郡 宏 (こおり ひろし)

講演中にお見せしたムービーや、関連するものは以下でご覧ください。

▶ 「吊り橋」の上のメトロノーム

<http://www.youtube.com/watch?v=ZMApCadGSt0>

▶ ホタルの大集団の同期した発光現象

Youtubeで “Synchronization firefly” を検索

▶ ロンドン・ミレニアム橋の事件

Youtubeで “London Millennium Bridge Opening” を検索

リズムとリズムの  
タイミングがあうことを  
シンクロ(同期)っていいます。

# どうやってリズムはシンクロするの？

▶ 意図的？

みんなですろえようと  
がんばっているのか？

▶ つまり、生き物だけができるのか？

# 身の周りのリズム

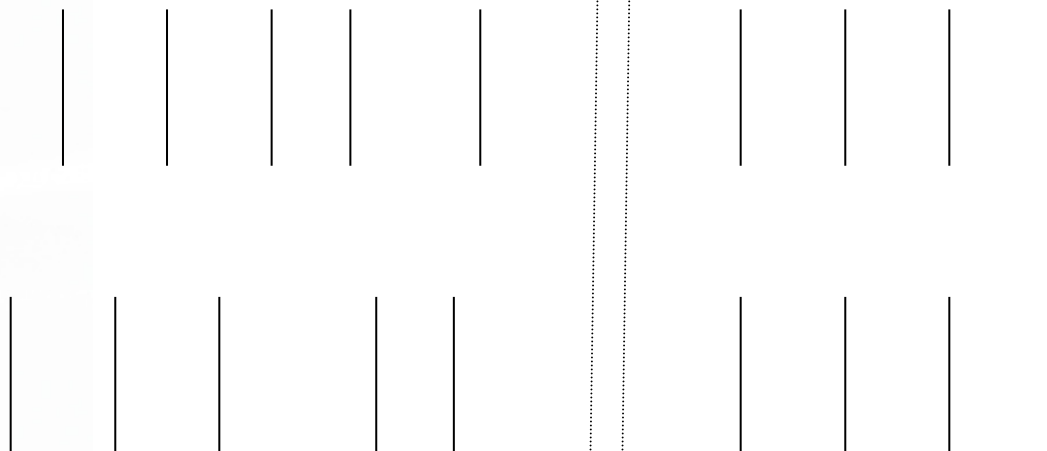
- ▶ 歩行
  - ▶ 羽ばたき、魚のおよぎ
  - ▶ 心臓
  - ▶ 24時間の体内時計
- まだまだたくさん

みんなシンクロが関わっている！

どうやってリズムを数式で表す？

その数式でシンクロすることを  
証明できる？

# 2人の拍手を考えよう



時間

# 拍手をシンクロさせるルール

- ▶ ルール0

自然な(つまり, こちよい)手拍子の間隔は  
2人とも同じだとして, それを1秒だとする

- ▶ ルール1

相手の手拍子が自分のより先に聞こえれば  
次の手拍子は少し??する

早く

- ▶ ルール2

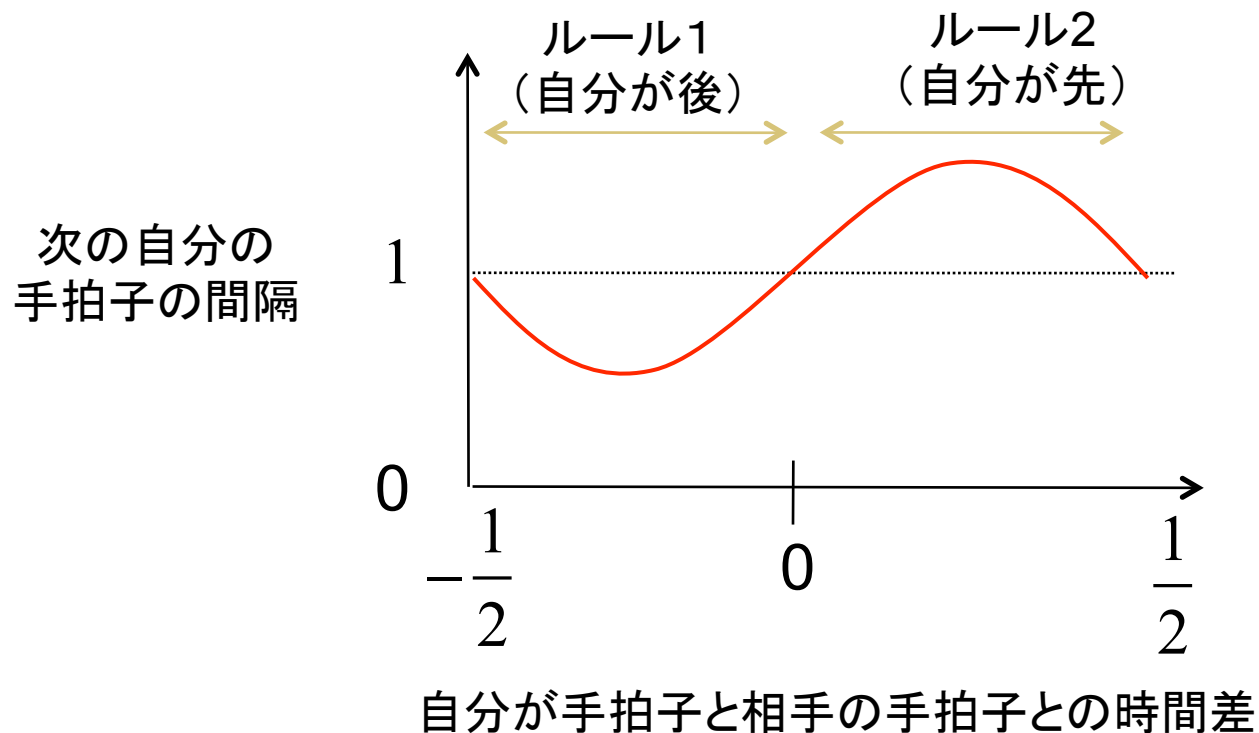
逆に, 相手の手拍子が自分より後に聞こえれば  
次の手拍子は少し??する

遅く

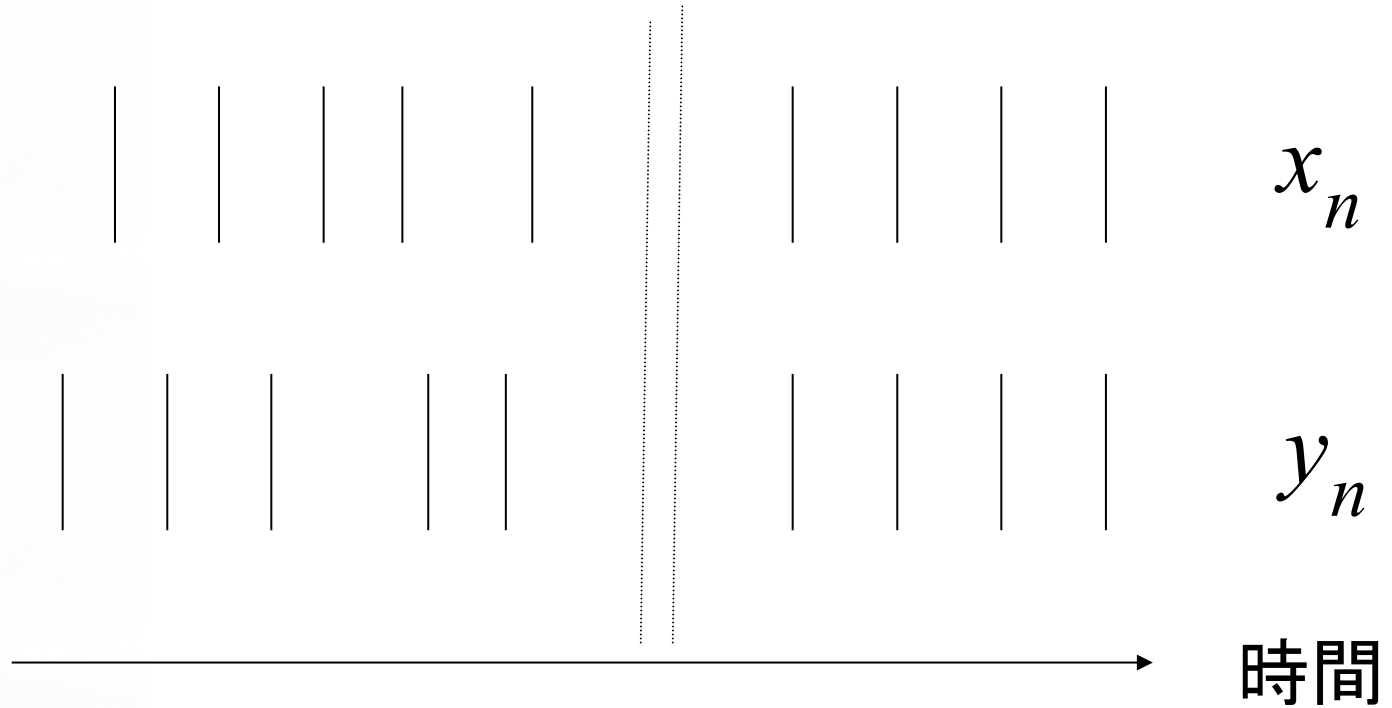


# ルールをグラフにしてみよう

- ▶ ルール1: 相手の手拍子が自分のより先に聞こえれば  
次の手拍子は少し早くする
- ▶ ルール2: 逆に, 相手の手拍子が自分より後に聞こえれば  
次の手拍子は少し遅くする



# 数式登場！



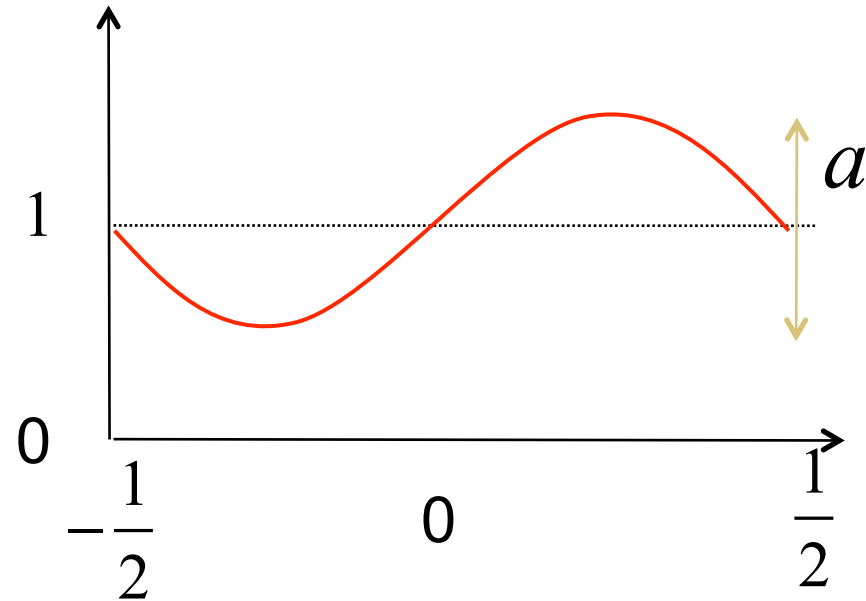
$x_n$  Xさんのn回目の手拍子の時刻

$y_n$  Yさんのn回目の手拍子の時刻

# ルールを数式にしてみよう

Xさんの次の  
手拍子の間隔

$$x_{n+1} - x_n$$



Xさんの手拍子とYさんの手拍子との時間差

aは相手にどのくらい影響を受けやすいかを表す.

$$y_n - x_n$$

$$\begin{cases} x_{n+1} - x_n = 1 + \frac{a}{2} \sin 2\pi(y_n - x_n) \\ y_{n+1} - y_n = 1 + \frac{a}{2} \sin 2\pi(x_n - y_n) \end{cases}$$

2変数連立  
漸化式!

# 数式を解いてみよう

$$\begin{cases} x_{n+1} - x_n = 1 + \frac{a}{2} \sin 2\pi(y_n - x_n) \\ y_{n+1} - y_n = 1 + \frac{a}{2} \sin 2\pi(x_n - y_n) \end{cases}$$

$z_n = x_n - y_n$  と置く (二人の手拍子の時間差)

辺々ひくと

$$z_{n+1} - z_n = -a \sin 2\pi z_n$$

$$\Leftrightarrow z_{n+1} = z_n - a \sin 2\pi z_n$$

を得る.

1変数漸化式!  
簡単に解けそう?

手拍子の時間差が従う漸化式

$$z_{n+1} = z_n - a \sin 2\pi z_n$$

解けない... (T\_T)

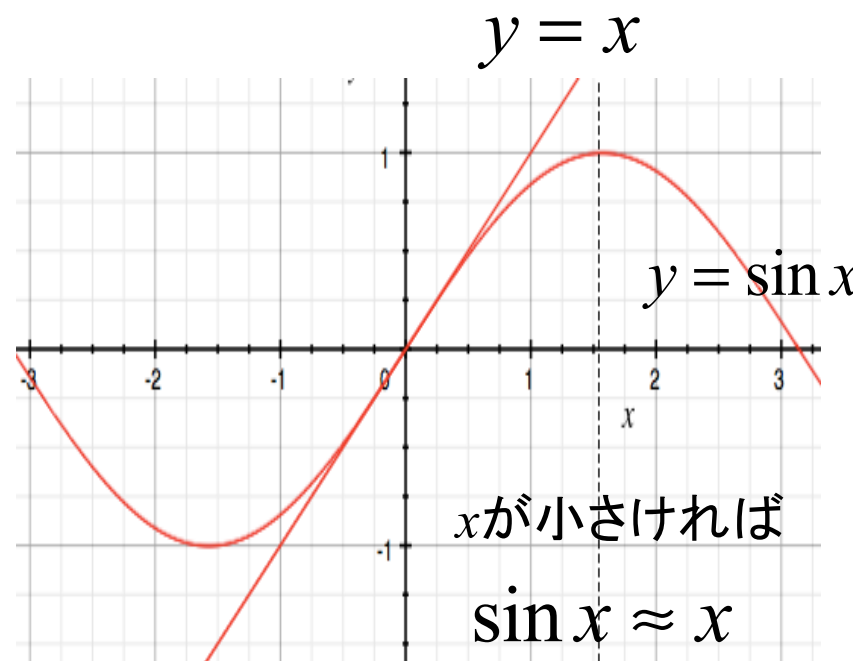
あきらめないで近似しましょう.

$z_n$ が小さければ近似できる.

$$\begin{aligned} z_{n+1} &\approx z_n - 2a\pi z_n \\ &= rz_n \quad (r = 1 - 2a\pi) \end{aligned}$$

$$\therefore z_{n+1} = r^n z_1$$

$|r| < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$  時間がたてば, 手拍子がシンクロ



# 近似しないとは？

$$z_{n+1} = z_n - a \sin 2\pi z_n$$

大学で学べる数学を使うと  
こんなことがわかります.

$$r = 1 - 2a\pi \quad \text{と置く}$$

- (i)  $-1 < r < 1$       これはつまり  $a$  が小さい場合. 毎回少しだけ  
手拍子のタイミングをずらすことに相当する.

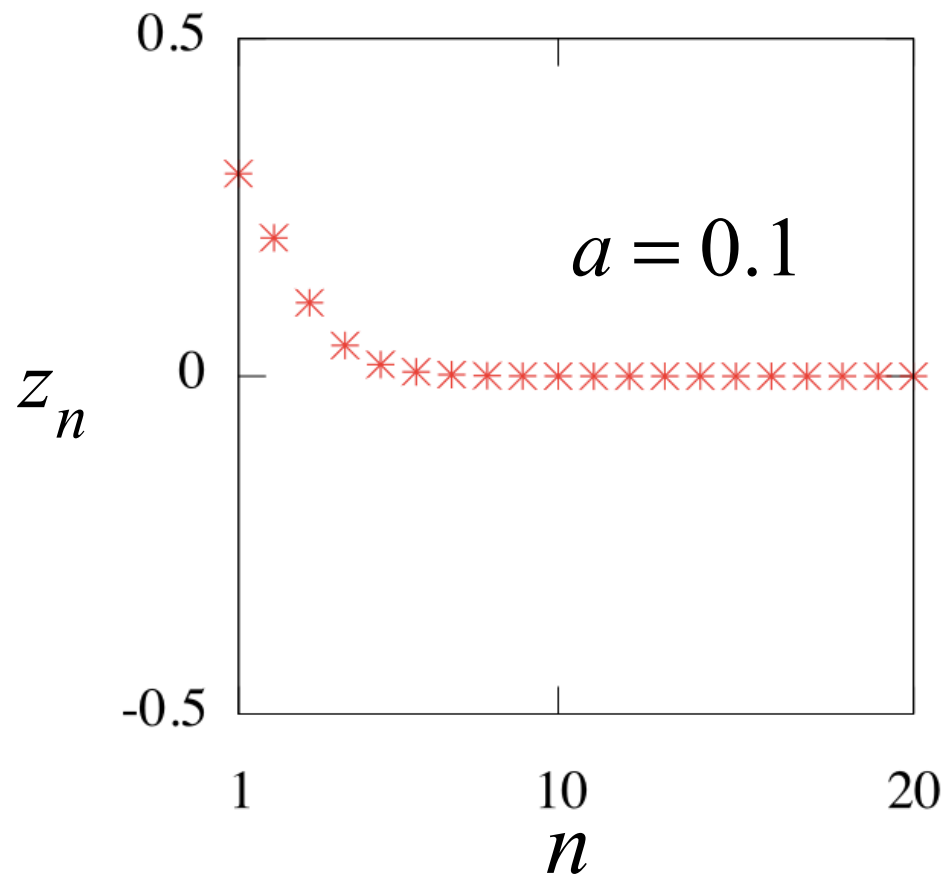
ちょうど交互になるタイミングではじめない限り, シンクロ.

- (ii)  $r \leq -1$       いろんなことが起こりうる. 手では解けないので,  
コンピューターが必要.

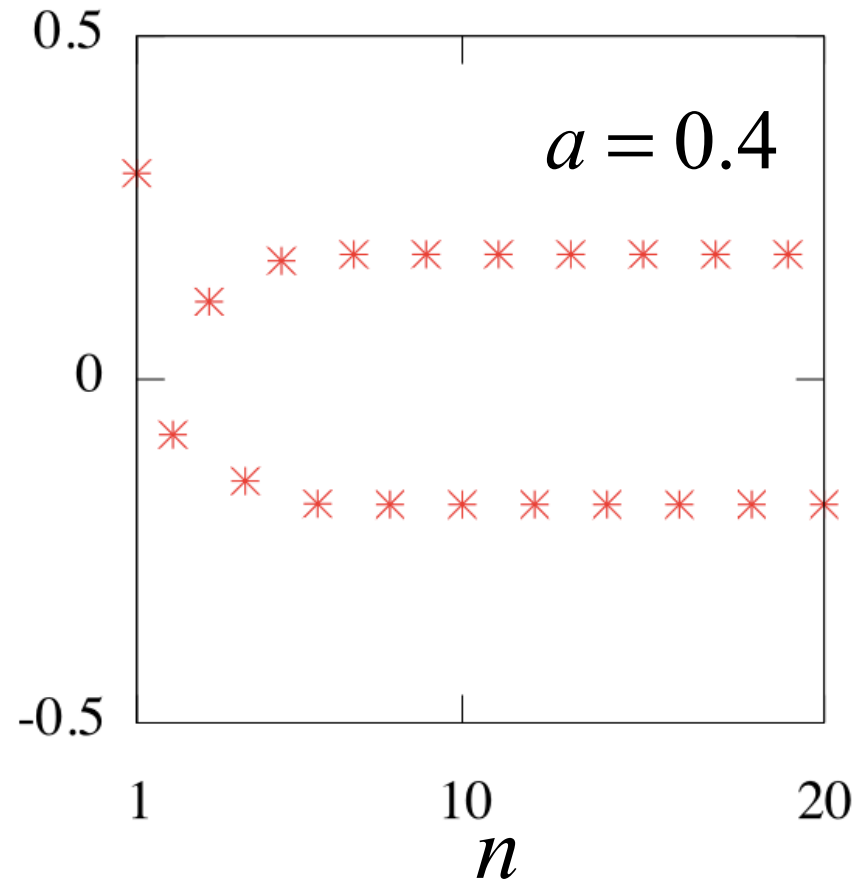
# 計算機で計算する

$$z_{n+1} = z_n - a \sin 2\pi z_n$$

初期値  $z_1 = 0.3$

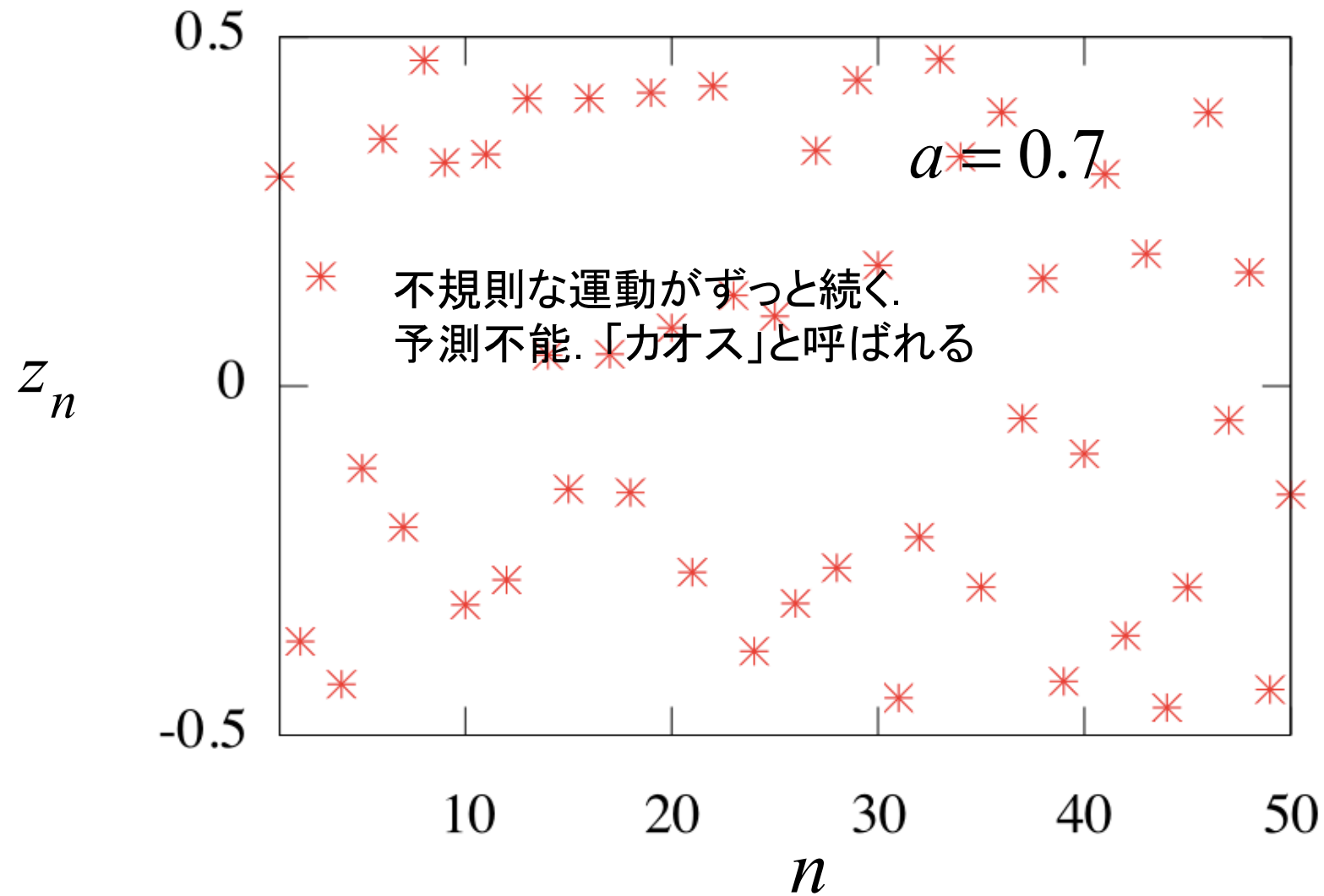


シンクロナした



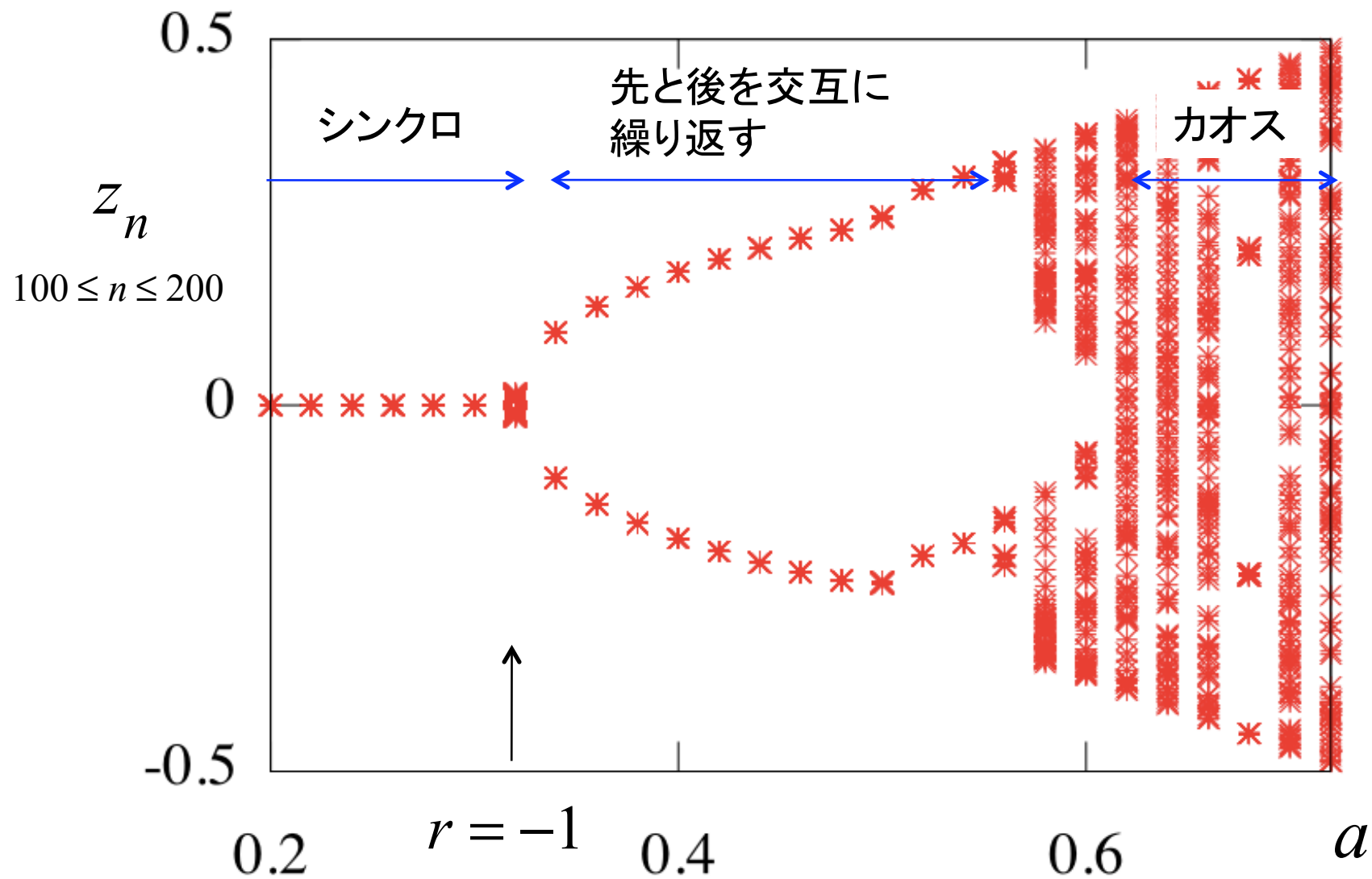
先行したり, おくれたり, 交互に来る

# カオス登場！





# いろいろなaの値で試す



# 宿題

$$z_{n+1} = z_n - a \sin z_n$$

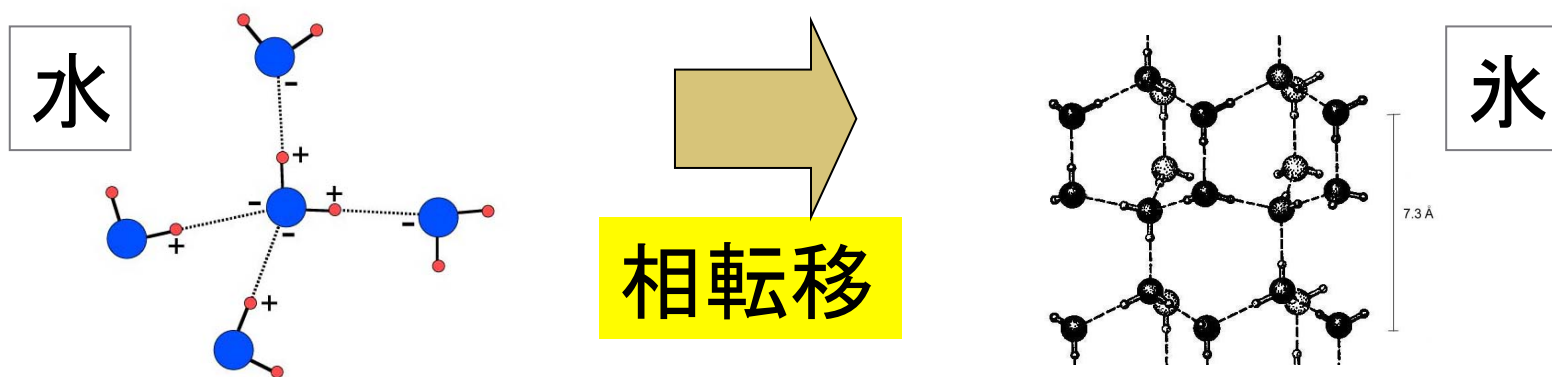
- (1) 初期条件として $z_1=0$  と  $z_1=\pi$  の場合を考えよう. この場合,  $z_n$  はどうなる?
- (2) (1)の初期条件以外を考える. 例えば $z_1=1$ などとする. このとき, 適当に $a$ の値を決め, 漸化式を計算機で解いて行こう. 例えば $a=0.5$ ,  $a=2.2$ ,  $a=3.2$ ,  $a=4.2$ などとする.  $n$ が増えるに従って $z_n$ がどのように変化するかを, グラフに表示してみよう.

# もっと複雑な場合は？

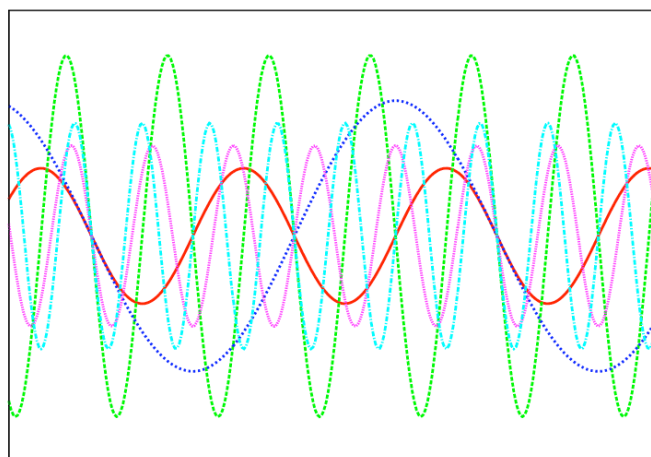
- ▶ 人数がたくさんの場合
- ▶ 自然な手拍子の周期がひとによって違う場合

# ばらばらの性質をもつたくさんのリズム

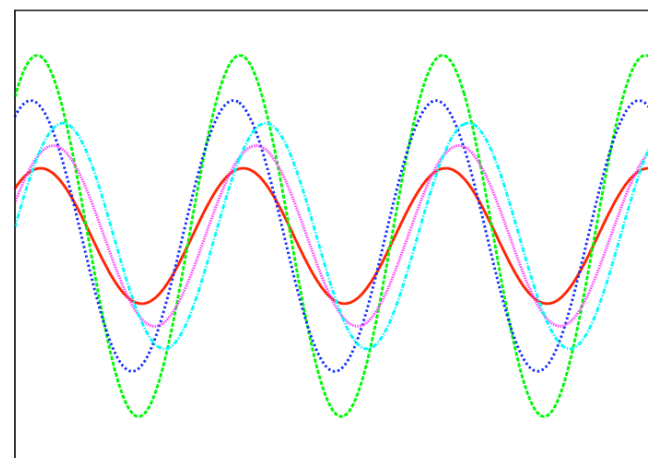
もともとバラバラなものが、コミュニケーションにより秩序を持つ



バラバラになる傾向 < コミュニケーションの力



蔵本転移



知りたいことに応じて、新しい数式を考えたり  
数式に手を加えたりする。  
そして解いたり、コンピューターで計算したりする。

こういうことを、理論物理学者や、応用数学者は  
毎日やっている。なんら難しいことじゃない。  
ただひたすら積み重ねていく。

# なんで数式で表すのか？ なんでそれを解くのか？

## 2つ大事なことがある

### ▶ 予測ができる

- 例えば天気予報は、数式で自然を表して、それをコンピューターで計算して予測している。
- いい数式が作れれば、渋滞だって、はたまた病気だって、予測したり直し方がわかったりする。数式で表す技術が、必要とされている！

### ▶ 理解を目指す

- 不要な事柄を全て削ぎおとす。
- するといろんな物がつながる(拍手もホタルも似た数式で表現できる)
- それによって初めて見える物がある。

*“Math is the lie that makes us realize the truth.”*  
数学は、我々に真実を悟らせるためのウソである

ストロガッツという数学者が、ピカソの言葉をもじった。

問題！ もともとピカソはなんと言ったのでしょうか？

*“Art is the lie that makes us realize the truth.”*  
芸術は、我々に真実を悟らせるためのウソである

ピカソ

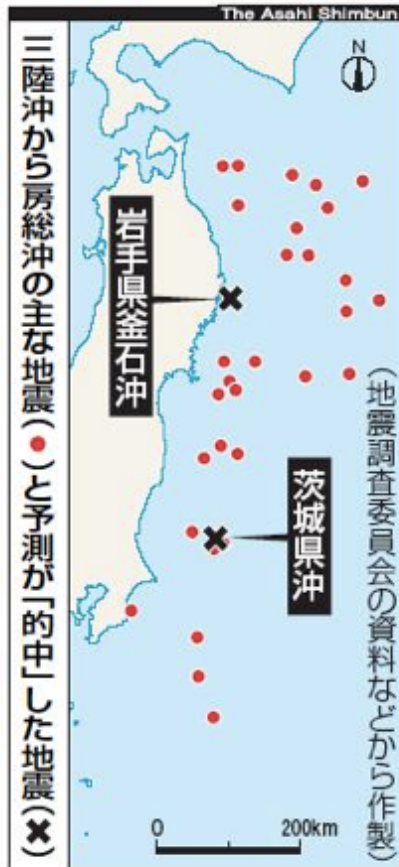


1995年の神戸.

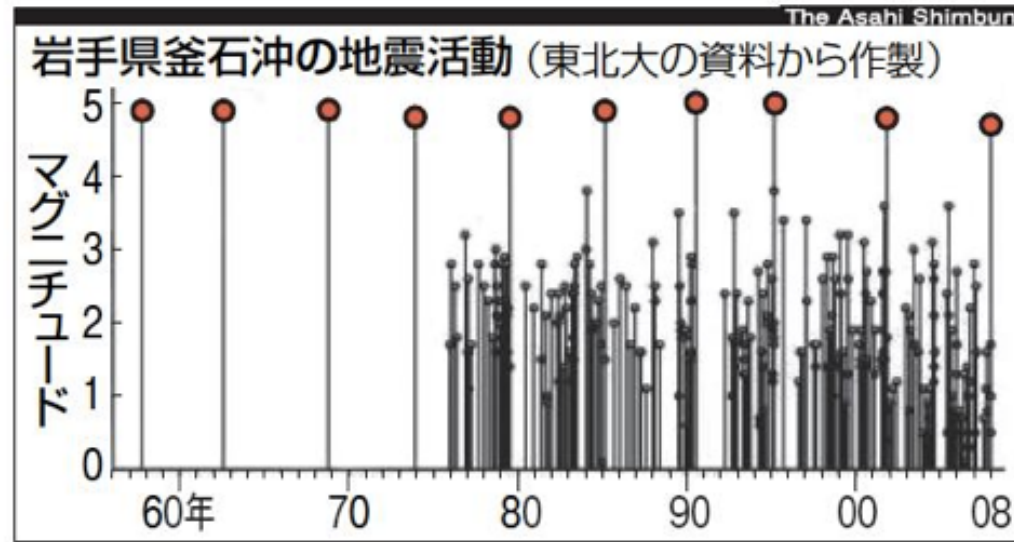
2011年の東北沿岸地域.

日本国民に突きつけられた難題.

# 地震もリズム？



東北大の松澤暢教授らは6年前、宮城県の釜石沖で「06年9月～08年1月に、M4・7～4・9の地震が68%の確率で発生する」と予測した。今年1月11日、この海域で、M4・7の地震が起きた。



平均周期:5年半

(朝日新聞より)

<https://aspara.asahi.com/blog/science/entry/FExooP8UzJ>

# どんな地震も周期的？

周期的に起こっていると認められる地震はそれほど多くないようだが、

南海地震：120年±20年

茨城県沖：20年±4年

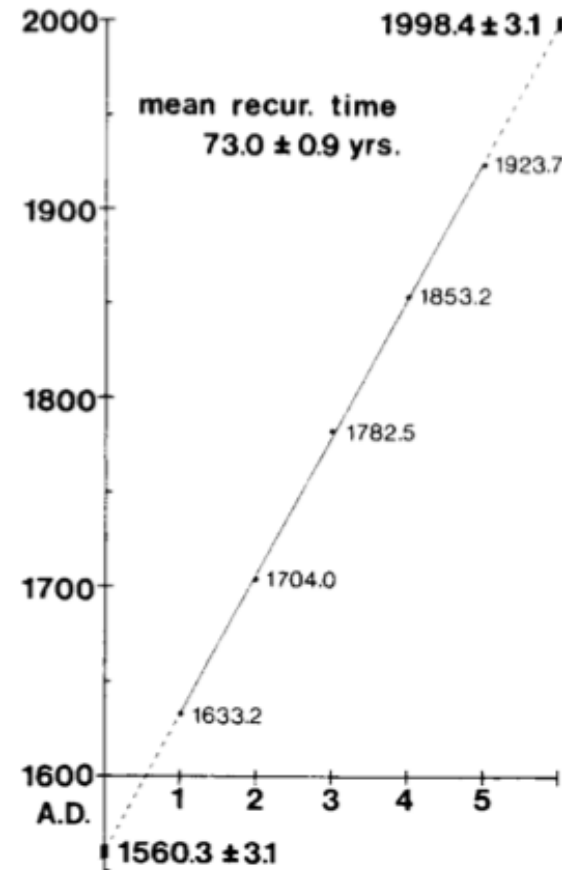
小田原：73年±1年

など、まあまあ周期的に来ていると考えられているものがある。

ところが！

小田原地震は1923年以後、まだ起きていない。少ないデータから、周期的と断定することは難しい。

小田原のM7規模の地震



Ishibashi Katsuhiko, 2004

*“Wichtig ist, dass man nie aufhört zu fragen”*

*重要なことは、決して問いやめないことだ*

アルバート・アインシュタイン

# もっと知りたい人は

- ▶ 「非線形科学」 集英社 蔵本由紀著  
一般向けなので読みやすいともいます.
- ▶ 「Sync」 早川書房 ストロガッツ著  
これも一般向けです.
- ▶ 「生命リズムとカ学系」 共立出版 郡宏・森田善久著  
(2011年9月から10月頃に出版予定)  
大学学部生向けの入門書です.