楽して計算するには ~計算を科学する~

らく

怠けて，手を抜き，いいかげんに　×

無駄を省き，効率的に，高速に　○

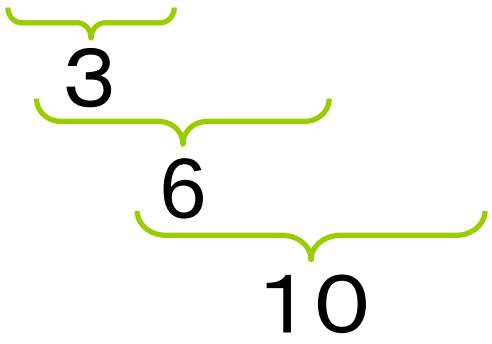
東京大学大学院
情報理工学系研究科　　牧野 和久
数理情報学専攻

効率性

例1．１＋２＋３＋４＋ … ＋1000

何回の演算（＋，－，×，÷）で計算できる？

（A）１＋２＋３＋４＋ … ＋1000　単純な方法



1）　1＋2＝3

2）　3＋3＝6

3）　6＋4＝10

……

999回

効率性

例1．１＋２＋３＋４＋ … ＋1000

何回の演算（＋，－，×，÷）で計算できる？

（B）１＋２＋３＋４＋ … ＋1000　公式を用いる

＝1000×（1＋1000）÷２

3回

（A） 999回 ＞＞（B） 3回

効率性

例2. a^n, ただし, a, n は正整数

何回の演算（＋，－，×，÷）で計算できる？

（A） $\overbrace{a \times a \times a \times a \times \cdots \times a}^{n個}$ 単純な方法

$\underbrace{a}_{a^2}\times a$

$\underbrace{a^2}_{a^3}\times a$

$\underbrace{a^3}_{a^4}\times a$

1） $a \times a = a^2$

2） $a^2 \times a = a^3$

3） $a^3 \times a = a^4$

……

$n-1$回

効率性

例2. a^n, ただし, a, n は正整数

何回の演算（＋，－，×，÷）で計算できる？

（B）$n=2^k$ のとき （説明を簡単にするため）

1） $a \times a = a^2 = 2^1$

2） $a^2 \times a^2 = a^4 = 2^2$

3） $a^4 \times a^4 = a^8 = 2^3$

4） $a^8 \times a^8 = a^{16} = 2^4$

……

k） $a^{2^{k-1}} \times a^{2^{k-1}} = a^{2^k}$ k回

効率性

例2．a^n, ただし，a, n は正整数

何回の演算（＋，－，×，÷）で計算できる？

$n=2^k$ のとき （説明を簡単にするため）

（A） 2^k －1回 ＞＞（B） k 回

1023　　10

効率性

n桁のとき

例3. 何回，回転されれば鍵は開けられる？

- 番号が既知のとき

  各桁： 高々5回

  5回×4桁＝高々20回

  $5n$回

- 番号が未知のとき

  全通り： 高々10000回

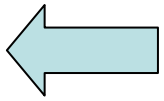
  10^n回

効率性

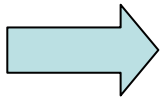
例4. 素因数分解

323を素因数分解せよ.

答　323　＝　17×19



易しい



難しい

例4. 素因数分解

RSA Laboratories　RSA576
1993年　1万ドル

188198812920607963838697239461650439807
163563379417382700763356422988859715234
665485319060606504743045317388011303396
716199692321205734031879550656996221305
1687593076502570 59　174桁

＝ 398075086424064937397125500550386491199
064362342526708406385189575946388957261
768583317 ×

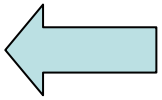
472772146107435302536223071973048224632
914695302097116459852171130520711256363
590397527

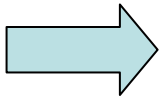
効率性

例4. 素因数分解　難しい？？？

323を素因数分解せよ.

答　323　＝　17×19


易しい


難しい？

一方向性関数
（公開鍵暗号の基礎）

RSA暗号の基礎
Rivest, Shamir, Adleman 1978
(Turing Award 2003)

コンピュータ(計算機)って何でもできる？

計算(機)？？

計算可能？？

1930年代頃　盛んに研究

計算モデル:　有限状態機械,
プッシュダウン・オートマトン
チューリング機械，RAM，λ-計算,
Postシステム，帰納的関数，．．．

問題Aが計算モデルMで計算可能:

有限ステップで問題Aを解く
計算モデルMでのアルゴリズムの存在

計算可能性

計算モデル：　有限状態機械

∩

プッシュダウン・オートマトン

∩

等価　チューリング機械，RAM，λ-計算，Postシステム，帰納的関数，．．．

Church-Turingの提唱　安定した概念

A. Church, K. Gödel, S. C. Kleene, E. Post, A.A. Markov, A.M. Turing らによって様々な妥当な計算モデルとそれに基づく計算可能性が提案されたがすべて等価

コンピュータ(計算機)って何でもできる？

どんな問題も計算可能？？　　NO！

Postの対応問題

入力：0-1列集合 A＝{a_1, a_2, … , a_k},

B＝{b_1 , b_2 , … , b_k }

出力：次の条件を満たす i_1 , i_2 , … , i_m　有限個

が存在すれば，YES，さもなければ，NO

$$a_{i_1} a_{i_2} \ \ldots \ a_{i_m} = b_{i_1} b_{i_2} \ \ldots \ b_{i_m}$$

Postの対応問題

入力：0-1列集合 A＝{a_1, a_2, ... , a_k},

B＝{b_1 , b_2 , ... , b_k }

出力：次の条件を満たす i_1 , i_2, ... , i_m

が存在すれば，YES，さもなければ，NO

$$a_{i_1} a_{i_2} \ \ldots \ a_{i_m} = b_{i_1} b_{i_2} \ \ldots \ b_{i_m}$$

例．A＝{1, 10111, 10}, B＝ {111, 10, 0}

a_1 a_2 a_3 b_1 b_2 b_3

10111 | 1 | 1 | 10 ＝ 10 | 111 | 111 | 0

a_2 a_1 a_1 a_3 b_2 b_1 b_1 b_3

YES

Postの対応問題

入力：0-1列集合 A＝{a_1, a_2, ... , a_k},

B＝{b_1 , b_2 , ... , b_k }

出力：次の条件を満たす i_1 , i_2 , ... , i_m 有限個

が存在すれば，YES，さもなければ，NO

$$a_{i_1} a_{i_2} \ \ldots \ a_{i_m} = b_{i_1} b_{i_2} \ \ldots \ b_{i_m}$$

定理： Postの対応問題は計算不可能.

m＝1のとき $a_1 = b_1$ ？ $a_2 = b_2$ ？ . . . $a_k = b_k$ ？

m＝2のとき $a_1 a_2 = b_1 b_2$ ？ $a_1 a_3 = b_1 b_3$ ？ . . .

.

.

.

解がないとき，いつ止める？ 止められない！！！

計算可能であればいい？？

問題Aが計算可能：

有限ステップで問題Aを解くアルゴリズムの存在

時間量，領域量

基準は入力サイズ

例．クラス40人の‘良い’座席表を作る．

入力サイズ $n = 40$

入力サイズ	計算時間				
	n	n^2	n^3	2^n	$n!$
10	1×10^{-9}秒	1×10^{-8}秒	1×10^{-7}秒	1×10^{-7}秒	3.6×10^{-4}秒
20	2×10^{-9}秒	4×10^{-8}秒	8×10^{-7}秒	1×10^{-4}秒	7.5年
30	3×10^{-9}秒	9×10^{-8}秒	2.7×10^{-6}秒	1.1×10^{-1}秒	8.4×10^{14}年
40	4×10^{-9}秒	1.6×10^{-7}秒	6.4×10^{-6}秒	1.8分	2.6×10^{30}年
50	5×10^{-9}秒	2.5×10^{-7}秒	1.3×10^{-5}秒	31時間	2.3×10^{48}年
100	1×10^{-8}秒	1×10^{-6}秒	1×10^{-4}秒	4.1×10^{12}年	2.9×10^{140}年
1000	1×10^{-7}秒	1×10^{-4}秒	0.1秒	…	…

10BIPS(billion instructions per second)の計算機を用いた場合

計算可能であればいい？？

問題Aが計算可能:

有限ステップで問題Aを解くアルゴリズムの存在

時間量，領域量

基準は入力サイズ

例. クラス40人の‘良い’座席表を作る.

入力サイズ $n = 40$

速い: 多項式時間で解ける

遅い: 指数時間で解ける

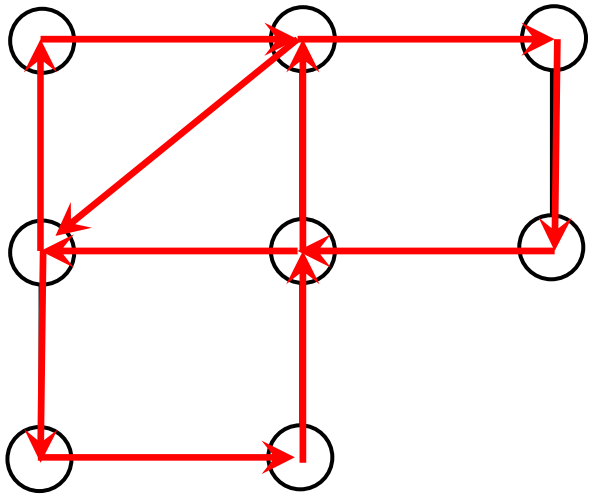
P vs NP

- Euler閉路問題　　多項式時間で解ける
- Hamilton閉路問題　??????

Euler閉路問題

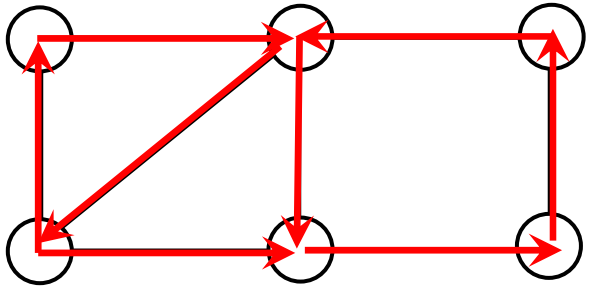
Euler閉路：　すべての辺を丁度1回通る閉路

（1）



Euler閉路あり

（2）



Euler閉路なし??

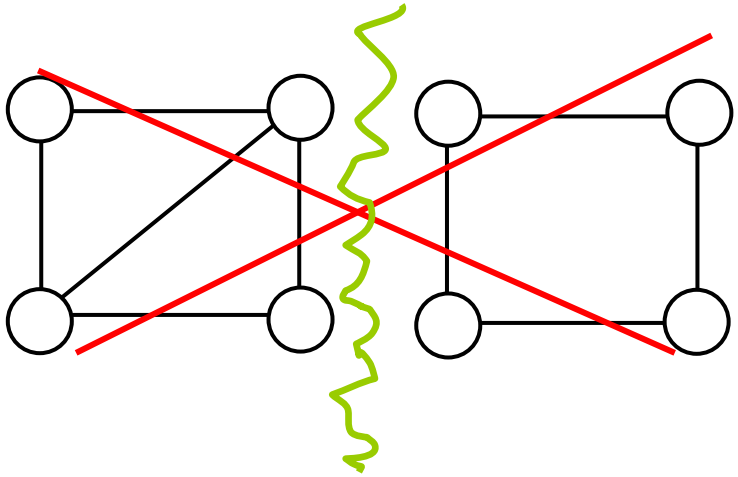
Euler閉路問題

Euler閉路： すべての辺を丁度1回通る閉路

Euler閉路が存在

⇕

連結，かつ，すべての点の次数が偶数



連結でない

Euler閉路問題

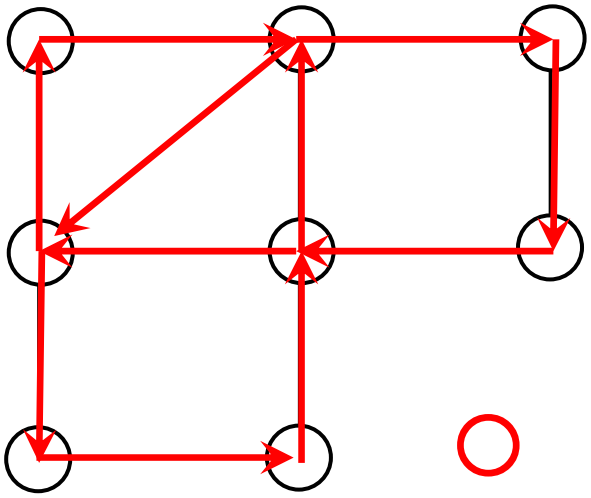
Euler閉路： すべての辺を丁度1回通る閉路

$\exists$ Euler閉路が存在

$\Updownarrow$

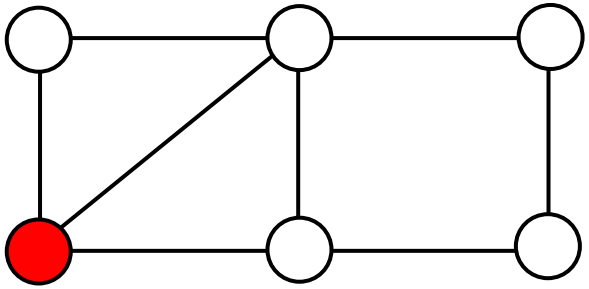
$\forall$ 連結，かつ，すべての点の次数が偶数

（1）



○

（2）

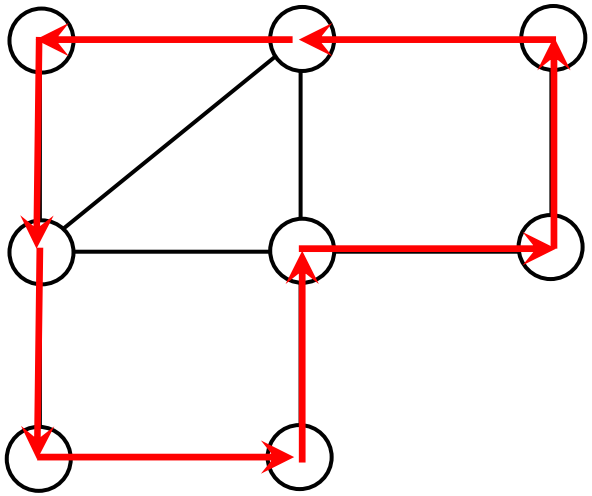


×

Hamilton閉路問題

Hamilton閉路： すべての点を丁度1回通る閉路

（1）

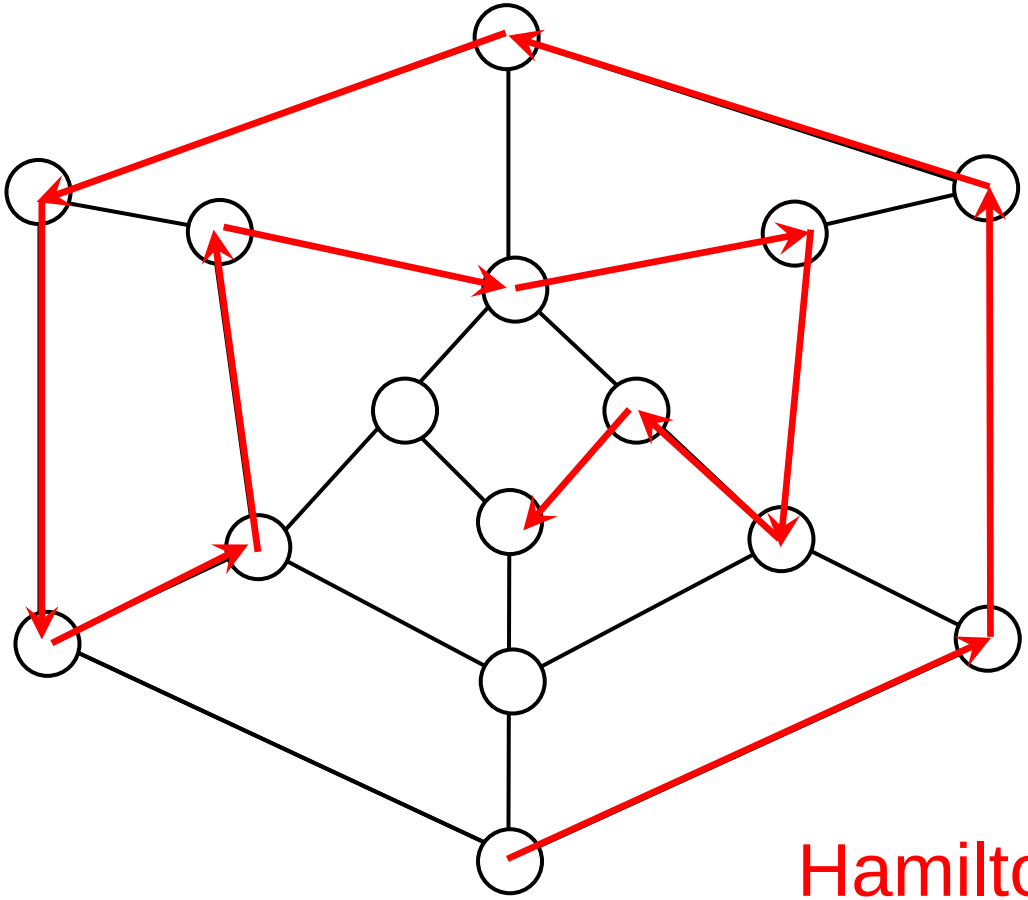


Hamilton閉路あり

Hamilton閉路問題

Hamilton閉路： すべての点を丁度1回通る閉路

（2）

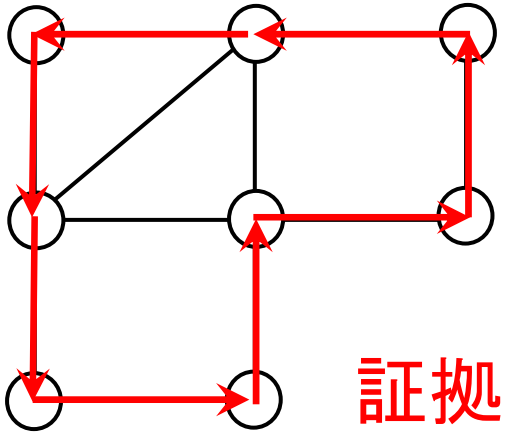


Hamilton閉路なし??

Hamilton閉路問題

Hamilton閉路：　すべての点を丁度1回通る閉路

（1）Hamilton閉路あり



証拠：閉路

（2）Hamilton閉路なし

証拠？？？　　全ての閉路を確かめる？？

P vs NP

Euler閉路問題　　多項式時間で解ける P

Hamilton閉路問題　??????　　NP完全

まとめ

- 効率的に解くことの重要性
- 計算可能性
- 多項式時間
- P vs NP （証拠）