戦略的創造研究推進事業　CREST
研究領域「シミュレーション技術の革新と
実用化基盤の構築」
研究課題「数値線形シミュレーションの
精度保証に関する研究」

研究終了報告書

研究期間　平成16年10月～平成22年3月

研究代表者：大石　進一
（早稲田大学理工学術院
基幹理工学部応用数理学科、教授）

§1 研究実施の概要

本研究の目標は、従来精度保証がされていなかったシミュレーションツールに対して精度保証を付けるようにすることである。その実現のために、大きく次の2つを目標に研究を実施している。

(1) 数値線形シミュレーションツールを精度保証付きシミュレータへと性能向上させる理論とアルゴリズムを確立して、主要なシミュレータに実装して有効性を示す。

(2) 悪条件線形問題の解法アルゴリズムとポータブルかつ高速・高精度な精度保証アルゴリズムを開発し、既存有力シミュレータに実装して有効性を確認する。

以上の研究が達成されることにより、従来取り扱えなかった悪条件な数値線形代数の問題もシミュレータで必要最小限に近い手間で解け（解の存在、一意性の検証を含む）、得られた数値解の精度もほぼ過大評価なしに評価できるようになる。

これらを達成するためには、以下の研究の推進が不可欠である。

(a) 実問題に対して精度保証付きシミュレータを適用するために大規模な線形問題を高速に精度保証付きで解く方法の開発

(b) 悪条件な問題も取り扱えるようにするために高速・高精度な内積演算アルゴリズムの開発

(c) 上記で開発した手法にスケーラビリティ・ポータビリティを持たせるための枠組みの提案

これらの課題に関する研究及びその応用についての研究を行い、主に次の成果を得た。

(a-1) 連立一次方程式の解のシャープな精度保証法を開発した。これは、精度保証自身の品質を保証するものである。

(a-2) 連立一次方程式に対する精度保証に必要なメモリ量を大幅に削減した方式を考案し、スパース行列に対する精度保証法を開発した。本方式は、分散型並列計算向きの手法で、直接解法及び反復解法に適用可能である。

(a-3) 対称正定値行列を係数行列とする連立一次方程式に対する超高速精度保証法を開発した。これは、ダイレクトスパース解法にも適用可能で、理論的には精度保証の計算コストがほぼフリーである。

(a-4) 悪条件な係数行列を持つ連立一次方程式に対する精度保証法を提案した。また、それに関して高精度な近似逆行列を求めるRump法の収束証明をした。これまで20年以上未解決だった問題を、条件付きで解決した。

(a-5) 対称行列の固有値問題に対する高速な精度保証法を考案した。これは、各固有値・固有ベクトルに対して精度保証を与えるため、よりシャープな精度保証が可能となった。

(b-1) 任意に計算精度を向上させるベクトルの総和及び内積計算法を開発した。これにより、多倍長精度演算を使わずに、単精度演算や倍精度演算のみで高速かつ高精度な計算が可能となった。また、本研究でエラーフリー変換の概念を確立した。

(b-2) 並列化された任意計算精度の内積計算法を開発した。これは、データの依存性によって並列化が困難であった(b-1)の並列化版である。

(b-3) 任意の結果精度を持つベクトルの総和及び内積計算法を開発した。一般的に、結果精度を保証するアルゴリズムの開発は困難であるが、本方式では、問題の難しさに応じて自動的に計算精度を増加させる適応的な方法となっているため、必要最小限に近い計算量で所望の精度を持つ結果を得ることが可能となった。

(c-1) ポータビリティを損なわない連立一次方程式の精度保証法を提案した。これにより、計算機環境に依存しない精度保証法の実現が可能となった。

(c-2) 連立一次方程式に対する精度保証法の自動選択アルゴリズムを提案した。係数行列が密で、それほど悪条件でなければ、最も効率のよい精度保証を選択可能となった。

(c-3) 高速な行列計算ライブラリを用いた行列積に関する高精度計算を開発した。これは、特にMATLAB等のインタプリタ向きの方法で、ポータビリティの高い方式である。

(c-4) 計算幾何学の基礎判定問題の精度保証付きアルゴリズムを考案した。入力が浮動小数点数の場合は必ず正しい判定を返す方式であり、MATLAB等にも実装可能である。

(c-5) 大規模スパース系に対する高速かつ高精度な行列ベクトル積アルゴリズムを開発した。本研究で開発してきた高精度な内積計算アルゴリズムを、共役勾配法系統の反復解法に適用し、

通常の倍精度計算では収束しないような例に対して、収束が改善されることを確認した。
以上の成果により、本研究の目標は達成された。

§2 研究構想

（1）当初の研究構想

本研究の目標は、従来精度保証がされていなかったシミュレーションツールに対して精度保証を付けるようにすることである。その実現のための第一の目標は、「数値線形シミュレーションツールを精度保証付きシミュレータへと性能向上させる理論とアルゴリズムを確立する」ことである。その目標を達成するためには、まず、実問題に対して精度保証付きシミュレータを適用するために大規模な線形問題を高速に精度保証付きで解く方法の開発が必要である。そこで、「密行列の精度保証理論」、「疎行列の精度保証理論」をそれぞれ構築する。また、大規模問題を取り扱うため、「PC クラスタ上での精度保証」についても研究を推進する。研究目標の実現のための第二の目標は、「悪条件線形問題の解法アルゴリズムとポータブルかつ高速・高精度な精度保証アルゴリズムを開発し、既存有力シミュレータに実装して有効性を確認する」ことである。まず、悪条件な問題も取り扱えるようにするために高速・高精度な内積演算アルゴリズムの開発が必須である。そこで、「誤差無し内積計算法の展開」を行う。また、研究成果の波及効果の観点から、開発した手法にスケーラビリティ・ポータビリティを持たせるための枠組みの提案が必要である。そこで、研究成果を MATLAB 等に適用し、「主要シミュレータの精度保証化」を行う。また、計算環境に依存しない Java 言語等にも適用可能な方式を提案する。また、応用として「非線形問題に対する精度保証」についても取り扱う。最終年度には、本研究の「まとめ」も行う。

（2）新たに追加・修正など変更した研究構想

当初の研究構想に沿って、順調に研究は遂行された。したがって、研究構想自体には変更はないが、「誤差無し内積計算法の展開」において期待以上の成果を得たため、特に悪条件問題の取り扱いについては大きな成果が得られた。

§3 研究実施体制

（○：研究代表者または主たる共同研究者）

（1）「早稲田大学」グループ

①研究参加者

	氏名	所属	役職	参加時期
○	大石 進一	早稲田大学	教授	H16.10～H22.3
	荻田　武史	早稲田大学	CREST 研究員	H16.10～H20.3
	西　哲生	早稲田大学	客員教授	H17.4～H18.3
	尾崎　克久	早稲田大学	客員講師	H19.8～H22.3
	山中　脩也	早稲田大学	客員研究助手	H19.5～H22.3
	太田　貴久	早稲田大学	CREST 研究員	H20.4～H22.3
	Siegfried M. Rump	ハンブルグ工科大学	教授	H20.10～H22.3
	高安 亮紀	早稲田大学	研究補助員	H20.5～H22.3
	Christian Keil	早稲田大学	客員講師	H20.9～H21.4
	田邉　國士	早稲田大学	客員教授	H20.10～H21.3
	薛　艶	早稲田大学	研究補助員	H21.7～H22.3
	劉　雪峰	早稲田大学	客員講師	H21.8～H22.3

② 研究項目

- 数値線形シミュレーションツールを精度保証付きシミュレータへと性能向上させる理論とアルゴリズムを確立して、主要なシミュレータに実装して有効性を示す。
- 悪条件線形問題の解法アルゴリズムとポータブルかつ高速・高精度な精度保証アルゴリズムを開発し、既存有力シミュレータに実装して有効性を確認する。

（2）「東京女子大学」グループ

①研究参加者

	氏名	所属	役職	参加時期
○	荻田 武史	東京女子大学	専任講師	H20.4～H22.3
	加藤 未来子	東京女子大学	研究補助員	H20.7～H21.3
	河内 佐保里	東京女子大学	研究補助員	H20.7～H21.3
	鈴木 江梨	東京女子大学	研究補助員	H21.7～H22.3
	藤之木 亜希	東京女子大学	研究補助員	H21.7～H22.3

② 研究項目

- 高速・高精度な数値計算アルゴリズムを開発する。
- 悪条件問題の高精度な精度保証アルゴリズムを開発する。
- 大規模問題線形問題に対する高精度計算法を考案する。

§4　研究実施内容及び成果

4.1　「早稲田大学」グループ

(1)研究実施内容及び成果

本研究グループの目標は、下記の2つである。

(I)　数値線形シミュレーションツールを精度保証付きシミュレータへと性能向上させる理論とアルゴリズムを確立して、主要なシミュレータに実装して有効性を示す。

(II)　悪条件線形問題の解法アルゴリズムとポータブルかつ高速・高精度な精度保証アルゴリズムを開発し、既存有力シミュレータに実装して有効性を確認する。

以上の研究が達成されることにより、従来取り扱えなかった悪条件な数値線形代数の問題もシミュレータで必要最小限に近い手間で解け（解の存在、一意性の検証を含む)、得られた数値解の精度もほぼ過大評価なしに評価できるようになる。

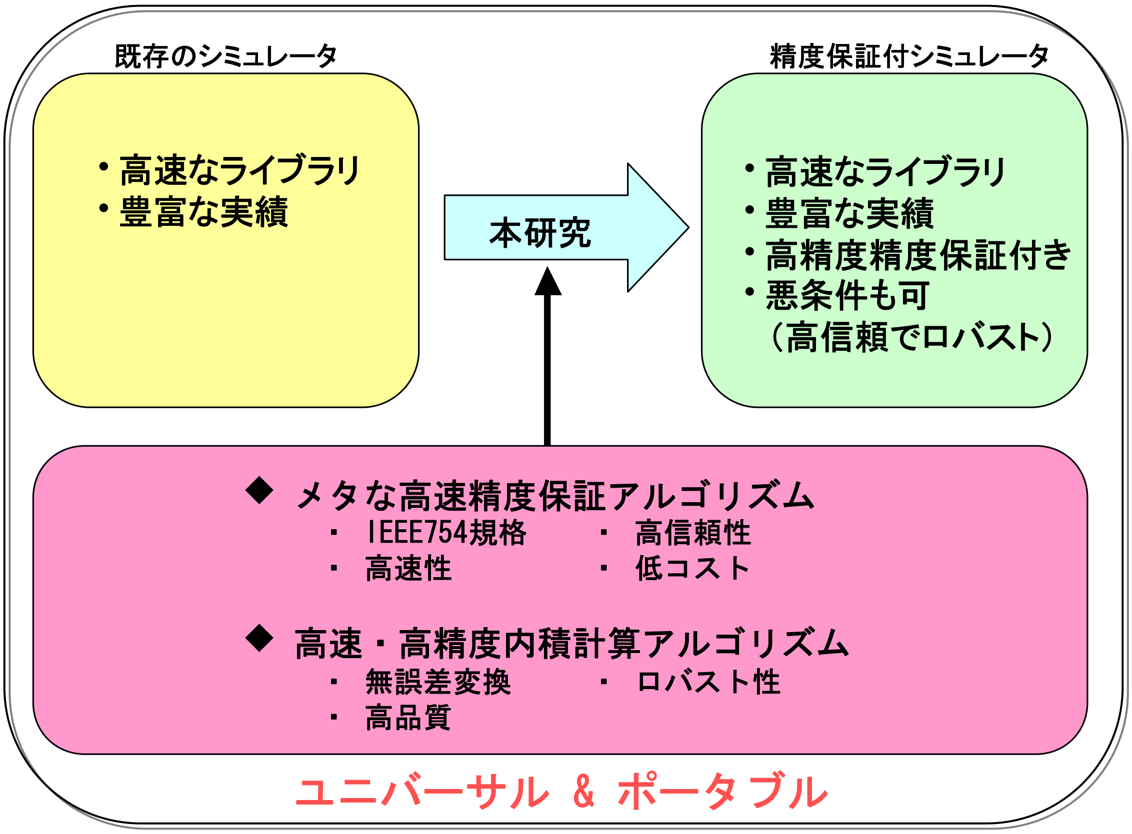

図1.　精度保証付きシミュレータへの展開

これらを達成するために、以下の研究を推進した。

(a)　実問題に対して精度保証付きシミュレータを適用するために大規模な線形問題を高速に精度保証付きで解く方法の開発

(b)　悪条件な問題も取り扱えるようにするために高速・高精度な内積演算アルゴリズムの開発

(c)　上記で開発した手法にスケーラビリティ・ポータビリティを持たせるための枠組みの提案

これらの課題に関する研究及びその応用についての研究を行い、実際には、下記のような成果を得ることができた(<・>内はキーワードを表す)。

(a-1) 連立一次方程式の解のシャープな精度保証法を開発した（論文[7]）。これは、精度保証自身の品質を保証するものである。
〈連立一次方程式〉, 〈高精度計算〉

(a-2) 連立一次方程式に対する精度保証に必要なメモリ量を大幅に削減した方式を考案し、スパース行列に対する精度保証法を開発した（論文[19]）。本方式は、分散型並列計算向きの手法で、直接解法及び反復解法に適用可能である。
〈連立一次方程式〉, 〈大規模問題〉

(a-3) 対称正定値行列を係数行列とする連立一次方程式に対する超高速精度保証法を開発した（論文[14]）。これは、ダイレクトスパース解法にも適用可能で、理論的には精度保証の計算コストがほぼフリーである。
〈連立一次方程式〉, 〈大規模問題〉

(a-4) 悪条件な係数行列を持つ連立一次方程式に対する精度保証法を提案した（論文[22]）。また、それに関して高精度な近似逆行列を求めるRump法の収束証明をした（論文[13]）。これまで20年以上未解決だった問題を、条件付きで解決した。
〈悪条件問題〉, 〈高精度計算〉

(a-5) 対称行列の固有値問題に対する高速な精度保証法を考案した（論文[5,16,21,31]）。これは、各固有値・固有ベクトルに対して精度保証を与えるため、よりシャープな精度保証が可能となった。
〈固有値問題〉

(b-1) 任意に計算精度を向上させるベクトルの総和及び内積計算法を開発した（論文[23]）。これにより、多倍長精度演算を使わずに、単精度演算や倍精度演算のみで高速かつ高精度な計算が可能となった。また、本研究でエラーフリー変換の概念を確立した。
〈高精度計算〉, 〈エラーフリー変換〉

(b-2) 並列化された任意計算精度の内積計算法を開発した（論文[8]）。これは、データの依存性によって並列化が困難であった(b-1)の並列化版である。
〈高精度計算〉, 〈スケーラビリティ〉

(c-1) ポータビリティを損なわない連立一次方程式の精度保証法を提案した（論文[15]）。これにより、計算機環境に依存しない精度保証法の実現が可能となった。
〈連立一次方程式〉, 〈ポータビリティ〉

(c-2) 連立一次方程式に対する精度保証法の自動選択アルゴリズムを提案した。これにより、係数行列が密で、それほど悪条件でなければ、計算量の意味で最も効率のよい精度保証を選択可能となった。
〈連立一次方程式〉, 〈ポータビリティ〉

(c-3) 高速な行列計算ライブラリを用いた行列積に関する高精度計算を開発した。これは、特にMATLAB等のインタプリタ向きの方法で、ポータビリティの高い方式である。
〈高精度計算〉, 〈スケーラビリティ〉, 〈ポータビリティ〉

(c-4) 計算幾何学の基礎判定問題の精度保証付きアルゴリズムを考案した（論文[3,17]）。入力が浮動小数点数の場合は必ず正しい判定を返す方式であり、MATLAB 等にも実装可能である。
〈高精度計算〉

これらの成果により、当初の目的は十分に達成できた。以下では、各項目別の詳細な研究内容と成果について述べる。

(a-1) 連立一次方程式の解のシャープな精度保証

連立一次方程式 $Ax = b$ の近似解に対する誤差限界の上限・下限を用いたシャープな精度保証法を提案した。本研究者らは、これまでにも連立一次方程式に対する比較的過大評価の少ない精度保証アルゴリズムを提案してきた。特に、近似解に対する誤差限界の上限・下限を同時に考えることにより、任意に近似解の誤差の過大評価を少なくする方式を開発した。この方式により、真の解と近似解の誤差を正確に把握することが可能になった。

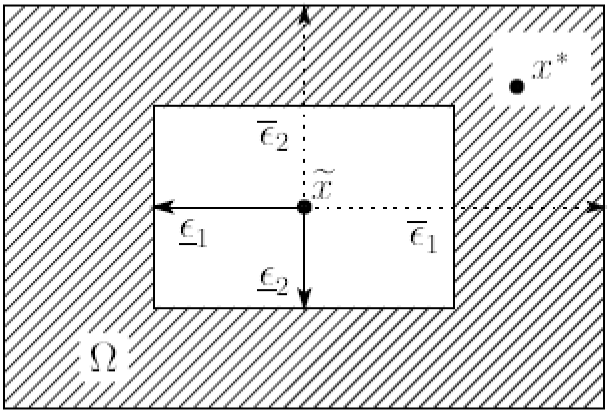

図 2. 真の解の存在範囲(2 次元の場合)

従来は、真の解が近似解を中心としたある長方形領域にあることを示したものであった。本提案手法は、真の解は図のように、ある長方形領域と長方形領域の間にあることを示す方法である。よって従来手法よりも真の解の存在範囲をより限定することが可能となった。

また、残差反復がどのように近似解を改善するかについての挙動を示した。残差反復とは、近似解 $x^{(0)}$について以下のように近似解を更新していく方法である。

```
for   i = 0:k
        r := b − Ax(i) ;      //  高精度に計算する
        Solve Ay = r ;        //  y について解く
        x(i+1) := x(i) + y ;  //  近似解を更新する
end
```

この反復により、解の絶対値の大きいところから改善される挙動と、改善できる範囲に関する不等式を示すことができた。**表 1** は、4 次の連立一次方程式に対する残差反復の例である。真の解は $(10, 10^3, 10^6, 10^9)^T$となっている。数値の下線部は、桁が正しいことが保証されていることを表す。例えば $x^{(0)}$の第4項は多くの桁について精度が保証されているが、1番目の要素については一桁も精度があっていないことがわかる。次に残差反復を1ステップ進めると、それぞれが、解の精度が保証できている桁が一定に良くなっていることがわかる。この現象に対する数学的証明を与えた。すなわち、Rを近似逆行列とすると$\|RA - I\|_\infty$ の量だけ、近似解のそれぞれの精度に対して、精度保証できる幅が広がることが示された。

この成果により、高精度な近似解とそのタイトな誤差評価の双方の枠組みを確立できた。

i	$\widetilde{x}^{(0)}$	$\widetilde{x}^{(1)}$	$\widetilde{x}^{(2)}$
1	$-1.711885408678072 \cdot 10^2$	$\underline{0.9999}35694692795$	$\underline{1.00000000000}2729$
2	$\underline{1.0}21301738732815 \cdot 10^3$	$\underline{1.0000000}11437893 \cdot 10^3$	$\underline{1.000000000000000} \cdot 10^3$
3	$\underline{1.0000}55792398647 \cdot 10^6$	$\underline{0.9999999999}79213 \cdot 10^6$	$\underline{1.000000000000000} \cdot 10^6$
4	$\underline{1.0000000}83648967 \cdot 10^9$	$\underline{0.99999999999999}80 \cdot 10^9$	$\underline{1.000000000000000} \cdot 10^9$

i	$\lvert x^* - \widetilde{x}^{(0)} \rvert$	$\lvert x^* - \widetilde{x}^{(1)} \rvert$	$\lvert x^* - \widetilde{x}^{(2)} \rvert$
1	$1.7218 \cdots \times 10^2$	$6.4305 \cdots \times 10^{-5}$	$2.7284 \cdots \times 10^{-12}$
2	$2.1301 \cdots \times 10^1$	$1.1437 \cdots \times 10^{-5}$	$3.4106 \cdots \times 10^{-13}$
3	$5.5792 \cdots \times 10^1$	$2.0787 \cdots \times 10^{-5}$	0
4	$8.3648 \cdots \times 10^1$	$2.0265 \cdots \times 10^{-5}$	0

表 1. 残差反復の履歴

(a-2) メモリ量を削減した連立一次方程式の精度保証

連立一次方程式に対して、メモリ量を大幅に低減した精度保証法の開発を行った。従来の精度保証法では、係数行列を格納するためのメモリ量の3～4倍のメモリ量を必要としていた。よって、問題が大規模になると、近似計算を行うことはできるが、精度保証はできない状況があった。この問題を解決するために、精度保証に必要な情報を部分的に計算する方法を提案し、使用するメモリ量と計算速度の関係を示した。

連立一次方程式 $Ax = b$ に対する精度保証では、近似逆行列 R、単位行列を I とすると、精度保証では $\|RA - I\|_\infty$ の上限を計算する必要がある。ここで、Rを求める際に、図 3 のように行単位に部分的に求めて $\|RA - I\|_\infty$ の上限を計算する。

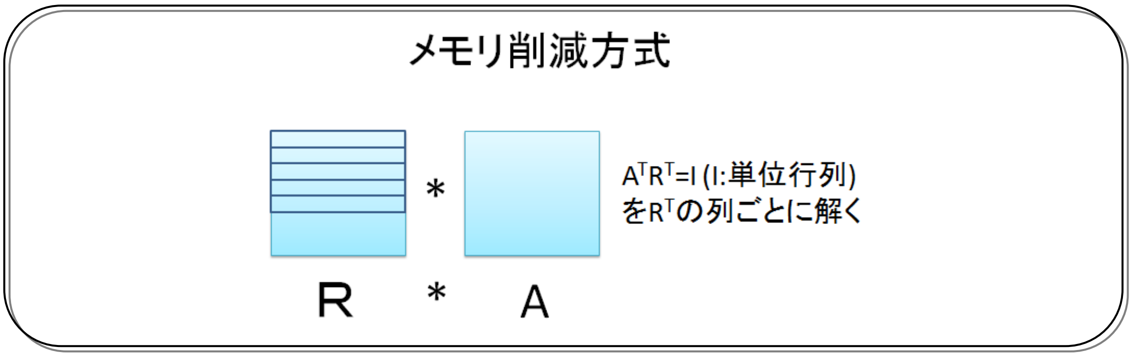

図 3. 逆行列の部分的な計算

このとき、計算機のメモリ量を考慮しながら、一度に求める Rの行数を決定する。計算には BLAS や LAPACK を用いることができ、使用するメモリ量を削減しながらも、高速性を保てる方式を開発した。

また、大規模疎行列を係数とする連立一次方程式に対する精度保証法の基礎的検討をした。行列の構造に制約がない場合は、精度保証には近似逆行列が必要であるが、疎行列の逆行列は密行列になってしまう。このことが、メモリ量の観点から近似計算はできても精度保証ができない状況を作っていた。本提案手法では、近似逆行列 Rの計算に、連立一次方程式のソルバを用いながら精度保証をすることができる。分散メモリ環境にも適した方式であり、メモリ量に関するボトルネックを解決した。この手法では、反復解法を用いることも可能である。

(a-3) 対称正定値行列を係数行列とする連立一次方程式の近似解に対する超高速精度保証

大規模正定値疎行列を係数とする連立一次方程式の超高速精度保証アルゴリズムの開発。従来の精度保証は、近似解を得る手間の２～８倍の計算コストを要した。本提案方式は、対称正定値という性質を利用し、精度保証が近似計算よりも低いオーダの計算量で行える理想的な精度保証法である。通常の精度保証は、近似逆行列の計算が必要である。ただし疎行列の逆行列は密行列になるため、これが従来手法のメモリ量の点でもボトルネックとなる（図4参照）。大規模問題の場合には、この問題のために近似解は計算できても、精度保証は実行できない状況であった。

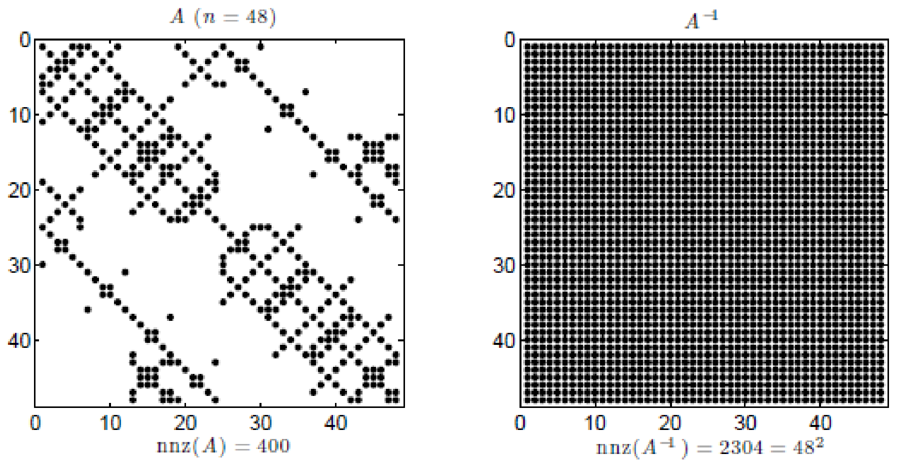

図4.　疎行列とその逆行列の関係

従来の精度保証式では、近似解の誤差評価式として、連立一次方程式 $Ax = b$ に対して

$$\left\|A^{-1}\right\|_\infty \left\|Ax-b\right\|_\infty$$

を計算する必要があり、$\left\|A^{-1}\right\|_\infty$ の上限を計算するために、A の近似逆行列 R を計算し

$$\left\|A^{-1}\right\| \le \frac{\left\|R\right\|_\infty}{1-\left\|RA-I\right\|_\infty}, \quad \left\|RA-I\right\|_\infty < 1$$

のように評価する。

これに対し、本方式では、行列が対称正定値であることを利用して、$\left\|A^{-1}\right\|_\infty$ の上限をＡの最小固有値の下限として求めることにより、精度保証を行った。その最小固有値の下限は、近似計算に必要なコレスキー分解の結果を利用して求めることができるように手法を構成した。これにより、精度保証のほぼすべての計算が近似計算に含まれる技巧的な方式となった。行列のサイズを n とすると、近似計算に必要なコレスキー分解には、$(1/3)n^3$ の計算量がかかる。これに対して、精度保証の計算量は n^2 のオーダとなり、圧倒的に小さい。これは精度保証の中では super-fast と呼ばれる部類に入る。対称正定値行列を係数行列とする連立一次方程式は、多くの応用があるために、顕著な業績と言える。

(a-4) 悪条件な行列の高精度な近似逆行列を求めるRump法の収束証明

これまで未解決問題であったRumpの方法による任意悪条件行列に対する逆行列計算法の収束性について、ある程度の条件下での証明に成功した。悪条件行列の逆行列を求めるRumpの方法は、行列Aに対して

$$A^{-1} \fallingdotseq R^{(1)} + R^{(2)} + R^{(3)} + \ldots$$ （$R^{(i)}$は成分が浮動小数点数である行列）

というように、要素が浮動小数点数である行列を複数用いて多倍長数のように数値を表し、悪条件行列の近似逆行列を求める方法である。ここに簡略化したアルゴリズムを記載する。

```
k := 1;   R := I;
while （良い近似逆行列Rが得られるまで）
    T := R * A;       // k倍精度で計算し、浮動小数点数に丸める
    C := inv(T);      // Tの逆行列を求める
    R := C * R;       // k倍精度で計算し、結果をk個の行列の和で表現
    k := k + 1;
end
```

このような単純な反復で、高精度な近似逆行列を求めることができる。問題がどれくらいの悪条件性を持っているかは事前にはわからないため、このように適宜反復をしながら近似逆行列を求めるアダプティブな方式が数値計算アルゴリズムとして理想的である。この方式を用いた連立一次方程式の精度保証付き数値計算法を提案し、日本応用数理学会論文賞を受賞した。以下は受賞理由の抜粋である：

−*−*−

本論文は、悪条件の連立一次方程式に対する高精度内積計算を用いた精度保証付き数値計算法を提案したものである。高精度内積計算を利用して近似逆行列を必要に応じて高精度に計算し、さらに、高精度内積計算により精確な解の残差を求めることにより、解の要素ごとの誤差評価を自動的に行う手法を提案し、数値実験により、その有効性を示している。連立一次方程式の解法は、科学技術計算の基本である。近年計算の大規模化に伴い、悪条件の問題に対処することは益々重要となってきている。この状況において、ソフトウェア的には容易に実現可能でハード的にも将来的に組み込まれる可能性が十分にある「高精度内積計算」という限定的な機能の拡張のみで、悪条件の連立一次方程式について、成分ごとの自動精度保証が可能となる解法を提案した意義は大きい。計算機設計技術の発展の方向性や数値計算的観点からそのあるべき姿を見据えて研究を進めている点も評価できる。

−*−*−

Rumpのアルゴリズムでは、通常の精度で逆行列を求める関数と、多倍長精度の行列積のみが必要な便利な方法である。行列積に関しては、ベクトルの内積計算が主計算となり、後に述べる高精度な内積計算法が大いに活躍した。しかしながら、この手法で「なぜ高精度な近似逆行列が求まるのか？」ということが、発見から20年来証明されていなかった。この問題に対して、ある程度の条件下では、アルゴリズムが上手く機能することの数学的証明を与えられた。

また、悪条件線形問題に対し、残差反復による解の反復改良法に対する収束証明を行った。従来、比較的良条件な問題に対しては前進安定性、後退安定性の証明がなされていたが、悪条件な問題に対しても、高精度な内積計算を用いることによってそれらの証明が可能となることを示した。これにより、得られた誤差評価が妥当なものであるかが評価可能となった。

(a-5) 対称行列の固有値問題に対する高速な精度保証

対称行列の固有値及び固有ベクトルの効率的な精度保証法を開発した。本方式では、Rump の定理を用いてすべての固有値に対して大域的な誤差限界を与え、その後、Wilkinson の定理を用いて各固有対(固有値と固有ベクトルの組)に対して、それぞれ精度保証を行う。そのため、それぞれの固有対に対して、よりシャープな誤差評価が可能となる。

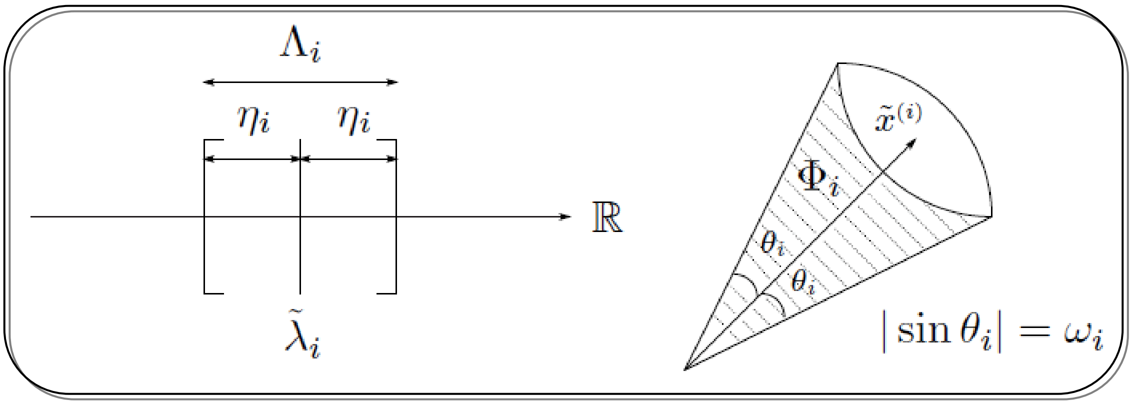

図 5. 固有値及び固有ベクトルの存在範囲

成分が疑似乱数であるような行列に対し、表 2 のような数値実験結果を得た。表中で、t_{eig} は全近似固有値の計算時間、t_{pair} は全近似固有対の計算時間、t_{veig} は全近似固有値に対する成分毎の精度保証に要した計算時間、t_{vpair} は全近似固有対に対する成分毎の精度保証に要した計算時間を意味する。計算環境は、CPU: Intel Pentium4 3.4GHz, MATLAB 7.0, IEEE 754 倍精度を用いた。また、全近似固有値・固有対の算出には MATLAB の関数 eig を使用した。

$A = A^T \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad A_{ij} \in [-1, 1]$ (乱数)

n	t_{eig}	t_{pair}	t_{veig}	t_{vpair}
100	0.015	0.015	0.016	0.016
500	0.188	1.156	0.484	0.485
1000	1.687	8.797	3.031	3.047
2000	12.08	64.27	21.30	21.34
2500	24.28	123.8	40.86	40.91

表 2. 数値実験結果(単位はすべて秒)

この結果から、固有対の精度保証に関しては、近似固有対の計算よりも高速に実行可能であることが示された。

(b-1) 任意に計算精度を向上させるベクトルの総和及び内積計算法

任意に計算精度を向上させるベクトルの総和及び内積の計算アルゴリズムを開発し、それらが計算量と計算時間の両面において非常に高速であることを示した。具体的には、ベクトル $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$の総和 sum($p$)を計算したいとする。ただし、各成分 p_iは浮動小数点数とする。ここで、Knuth の定理で示された2つの浮動小数点数 aと bの和をその浮動小数点数計算による近似値 xと正確な誤差 eの和に計算する関数を TwoSum として

$[x, e]$ = TwoSum(a, b)

と表すことにする。このとき

$a + b = x + e$

が数学的な意味で正しく成立する。

我々が開発した手法は

$[\pi_1, q_1]$ = TwoSum(p_1, p_2),
$[\pi_2, q_2]$ = TwoSum(p_3, π_1),
…
$[\pi_n, q_{n-1}]$ = TwoSum(p_n, π_{n-1})

と計算するものである（図 6 を参照）。このとき

π_n + sum(q) = sum(p)

が成立する。これをベクトル総和のエラーフリー変換（Error-free Transformation）と名付けた。

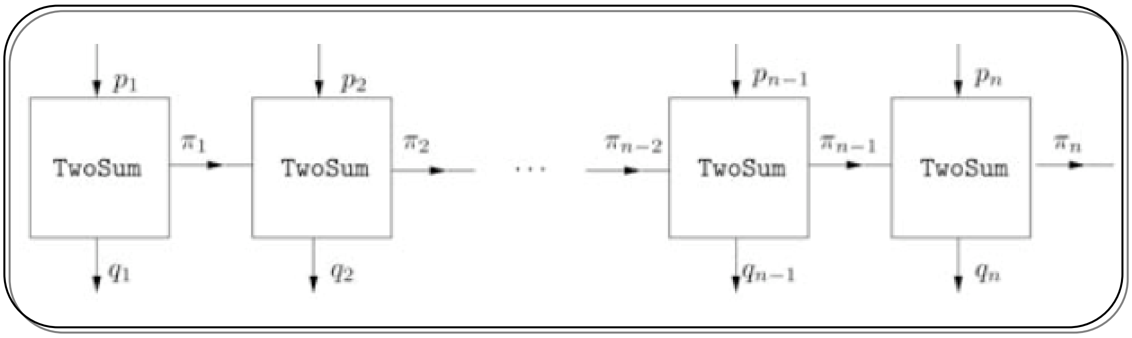

図 6. ベクトル総和のエラーフリー変換

また、$p' = (q_1, q_2, \ldots, q_{n-1}, \pi_n)$として、再びエラーフリー変換を繰り返すことができる（**図 7**）。これが反復ごとに誤差限界が必ず良くなることを数値実験により発見し、理論的にもこれを証明した（図 8）。

さらに、内積計算はベクトル総和の問題に帰着できる。我々はこのアルゴリズムを洗練させ、従来の最高速の手法に対して理論的かつ実験的に約40％高速であることを示した。

提案手法は、特別な多倍長精度演算ライブラリを必要とせず、IEEE 754 規格が定義する浮動小数点演算のみがあれば実装できる。よって今日の計算機環境のほぼすべてで実行可能なポータブルな計算アルゴリズムである。

この高精度内積計算は、連立一次方程式に対する高精度な精度保証法や悪条件行列に対する精度保証に大きく貢献した。さらに、固有値計算や特異値計算等に有効であることも知られており、様々な応用が期待できる。2005 年の出版以降、論文[23]の引用は少なくとも 116 件以上にのぼる。

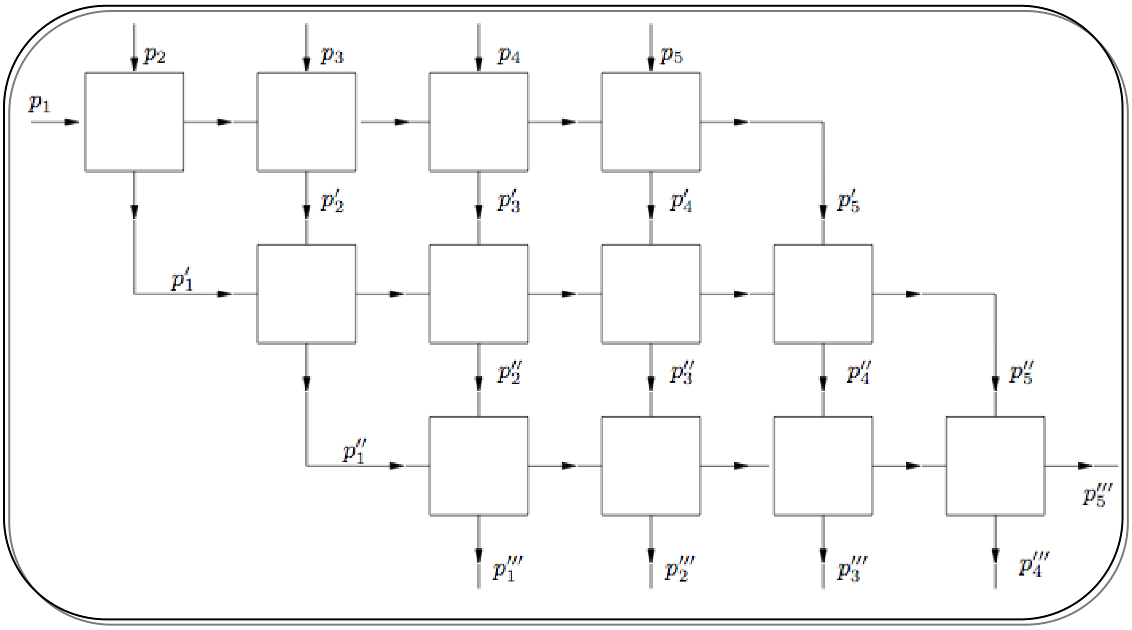

図 7. エラーフリー変換の反復

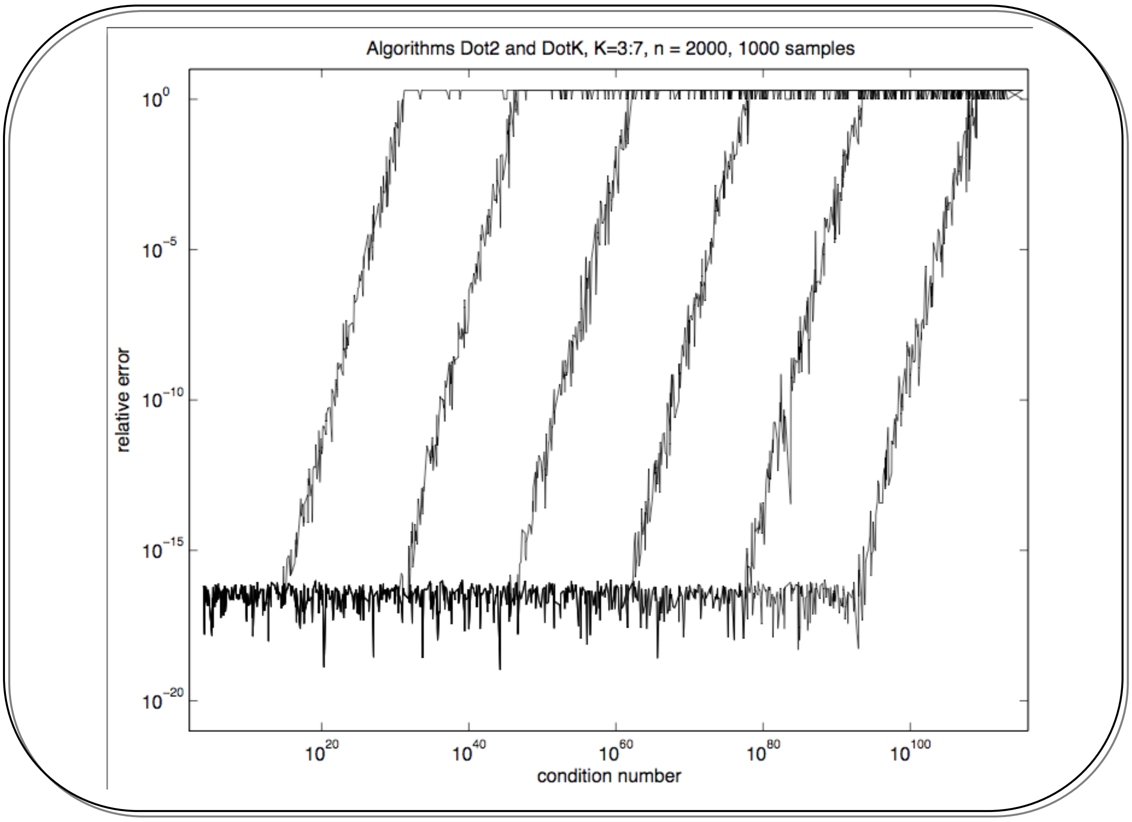

図 8. 条件数と相対精度（左から倍精度精度に対して 2 倍、3倍、. . . . 、7倍に相当する計算精度で内積計算を実行したもの）

(b-2) 並列化された任意計算精度の内積計算法

(b-1)の高精度内積計算アルゴリズムの効率的な並列化に関する研究を行った。内積計算レベルの並列化は、アーノルディアルゴリズムを用いた固有値計算や、ヤコビアルゴリズムを用いた特異値計算等に有効である。(b-1)で提案した高精度内積計算アルゴリズムは、逐次的に計算する方式であるため、そのまま並列化することはできない。本研究では、アルゴリズムを図 9 のように並列化した。

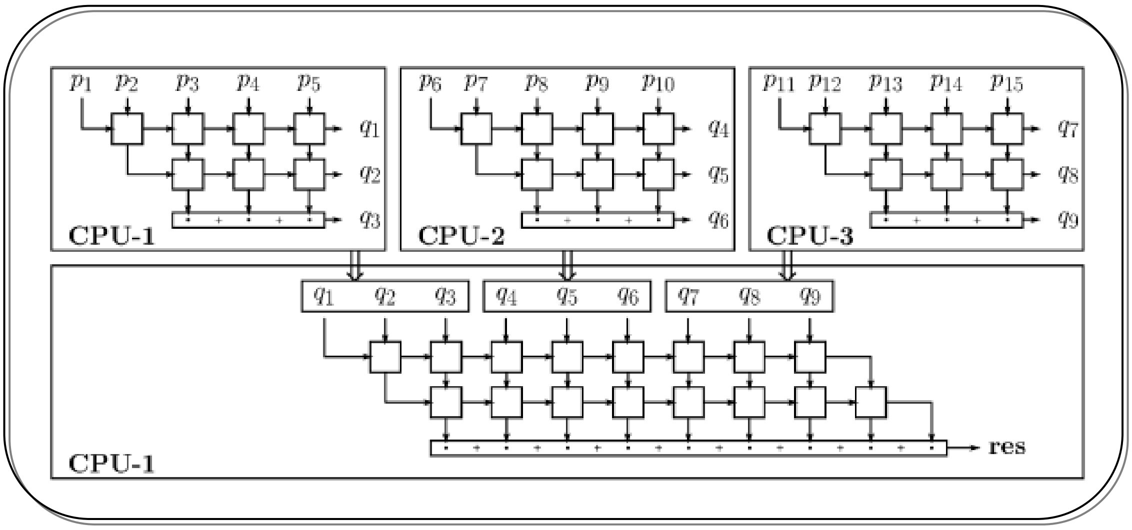

図 9. 並列化アルゴリズム

また並列化版のアルゴリズムは、(b-1)の逐次版のアルゴリズムと同程度の誤差限界を持ち、さらに共有メモリ計算機上で数倍程度の性能向上が可能であることを示した。

(b-1)や(b-2)で提案した高精度計算法の波及分野は大きい。図 10 は波及効果の一例である。

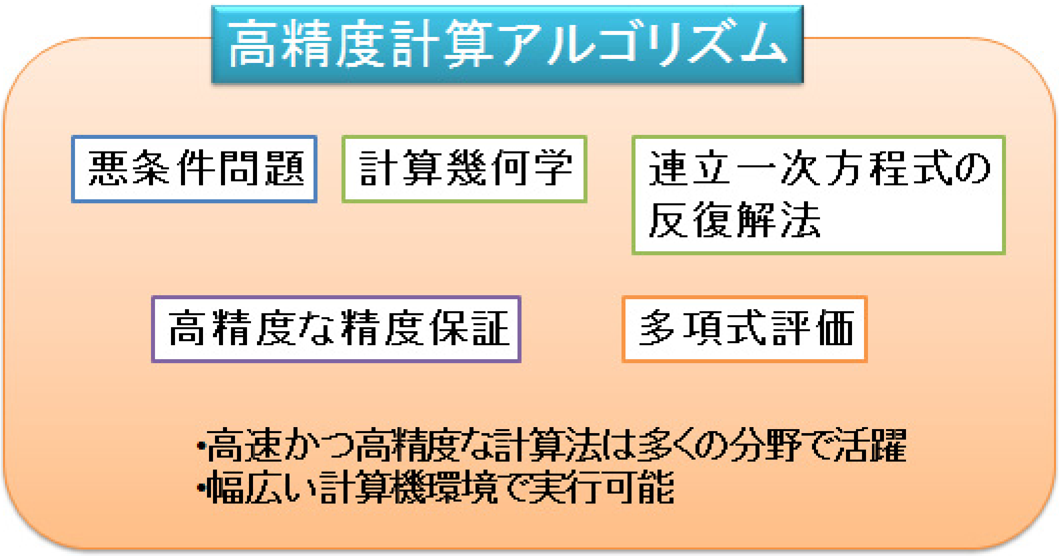

図 10. 高精度計算の波及効果

(c-1) ポータビリティを損なわない連立一次方程式の精度保証法

有向丸めを用いない高速な精度保証付き数値計算法を応用し、Java による連立一次方程式のための精度保証法を開発した。Java では、IEEE 754 が定める有向丸めが標準ではサポートされていない。外部インターフェースを用いれば、プログラム中に丸めの向きの変更が可能であるが、Javaの大きな利点である「環境に依存しないポータビリティ」が損なわれる。そこでデフォルトの丸めのモードである最近点への丸めモードのみを用いた連立一次方程式に対する精度保証付き数値計算法を開発した。有向丸めを用いない精度保証法は、有向き丸めを利用した精度保証法に対して、誤差限界が過大評価となることが知られていた。この弱点を克服するために高精度計算を残差の見積もりに用いて、近似解に対する誤差限界の過大評価を抑える工夫をした。この高精度度計算による計算量の増加は、精度保証法全体の中で無視できるぐらいのコストであった。よって効率的に高精度な誤差限界を最近点への丸めのみを用いて精度保証する方式を確立できた。Java の修飾子である strictfp を用いれば、IEEE 754 の規格に厳密に従い浮動小数点演算を行う。よって、この機能を用いて、どのような計算機環境でも同一の実験結果を得る、完全なポータビリティを持った精度保証方式として位置づけられる(図 11)。WEB アプリケーションなどでは、使用者の計算機環境が不特定であるために、このような精度保証方式は重要となる。

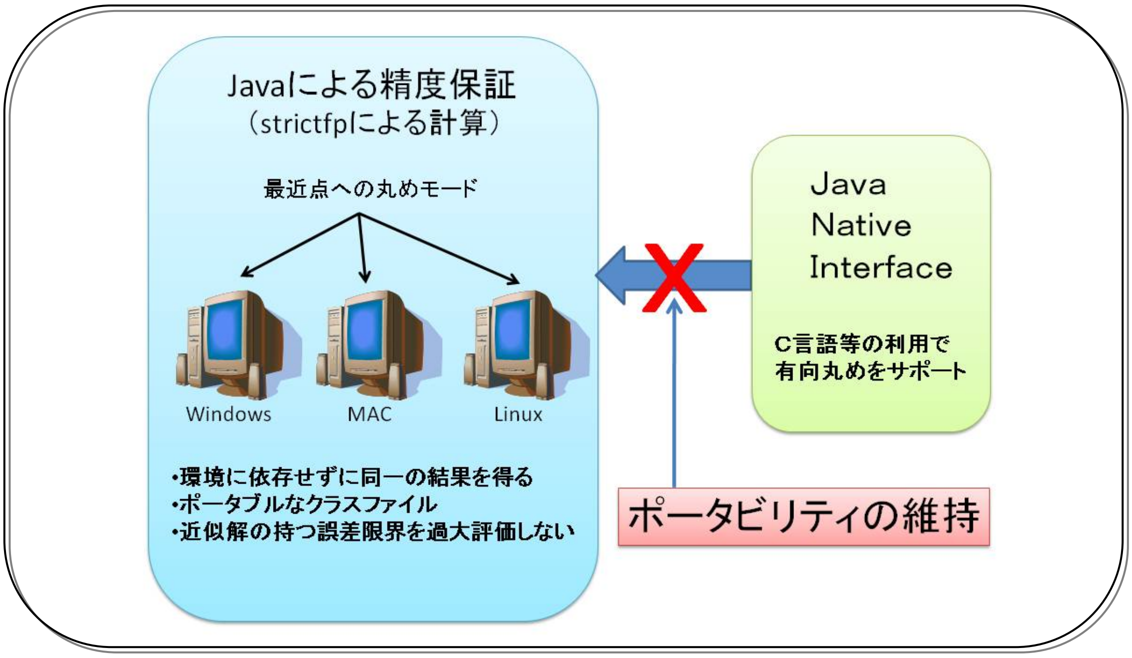

図 11. ポータブルな精度保証法

また Java のポータビリティを活かしつつ、近似解に対して成分毎に高精度な誤差評価を与える精度保証方式を開発した。通常の誤差評価式では、近似解の成分間に絶対値の大きな差がある場合は、相対的に絶対値の小さな要素に対して良い誤差評価を与えることができなかった。この問題点を高精度な内積計算を用いて解決するアルゴリズムを開発した。

(c-2) 連立一次方程式に対する精度保証法の自動選択アルゴリズム

連立一次方程式に対する精度保証法の自動選択アルゴリズムを開発した。連立一次方程式の精度保証法は今までにいくつか提案されており、精度保証法の計算コストと精度保証できる条件数の範囲にトレードオフがあった。図 12 では、行列のサイズを n=1000 とし、横軸に行列の条件数を与えて、各精度保証法による$\|RA-I\|_\infty$の上限を示した。この値が1未満であることが、精度保証が成功する条件となる。Method-A から E までの計算量も、図 12 に示した。

Method-A (2/3 n^3)
(Oishi-Rump)
Method-B' (5/3 n^3)
(Ozaki-Ogita-Oishi)
Method-B (8/3 n^3)
(Ogita-Oishi)
Method-C (10/3 n^3)
(Ogita-Rump-Oishi)
Method-D (16/3 n^3)
(Oishi-Rump)

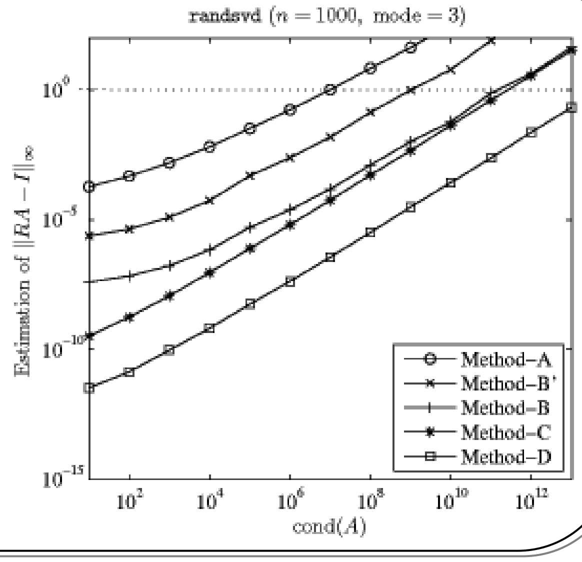

図 12. 各精度保証方式の計算量及び適用範囲

この図より、高速な手法ほど精度保証の適用範囲が狭く、コストをかける手法ほど適用範囲が広いことがわかる。この関係を理解し、問題が与えられたときに、どの精度保証法が最も高速に成功するかを議論した。その結果、O(n^2)の計算コストで、高確率に最も高速に精度保証に成功する手法を選択するアルゴリズムを開発した。この結果、図 13 のような、ユーザが精度保証を理解せずとも、簡単かつ高速に精度保証された結果が返ってくるツールを提供することが可能になる。

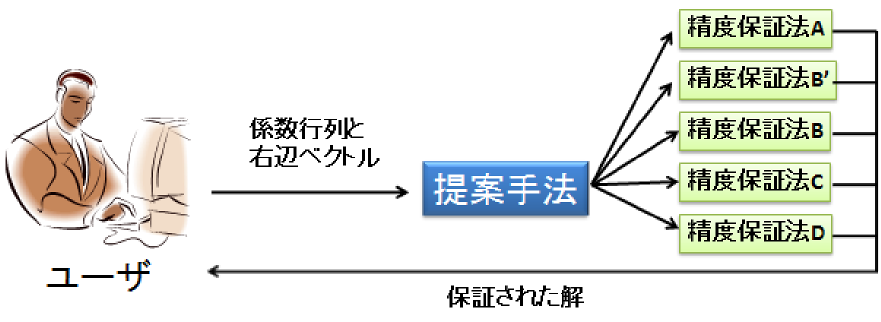

図 13. 提案手法の役割

(c-3) 高速な行列計算ライブラリを用いた行列積に関する高精度計算

密行列の乗算に対し、BLAS level3 を利用した高速かつ高精度な計算法を開発した。従来、行列乗算に関しては

- 多倍長精度の演算
- 高精度な内積計算法

のいずれかを用いることにより、精度の良い結果を得ることができた。本研究では、最適化や並列化に優れた BLAS の行列積関数を主に用いる方式を提案した。ある程度の次元以上になると、ほぼすべての計算が行列積に依存するために、BLAS の能力の恩恵を十分に受けて、高速に高精度な結果を得ることができた。

例を挙げると、(m,n)行列 A と(n,p)行列 B の積 AB を考える際に

$$A=A^{(1)}+A^{(2)},\ B=B^{(1)}+B^{(2)}$$

と浮動小数点演算で誤差なく行列を分解する。ここで $A^{(1)}$は A の上位ビットを保持し、$B^{(1)}$は B の上位ビットを保持している。ここで、$A^{(1)}B^{(1)}$を浮動小数点演算で計算しても誤差がないように行列を分割することができる。この分割の後、行列積 AB は

$$A^{(1)}B^{(1)}+A^{(1)}B^{(2)}+A^{(2)}B$$

と計算する。$A^{(1)}B^{(1)}$には誤差がなく、$A^{(1)}B^{(2)}$と$A^{(2)}B$を通じて、結果の下位ビットの情報をより多く得ることができる。一般に

$$A=A^{(1)}+A^{(2)}+\cdots+A^{(k)},\ B=B^{(1)}+B^{(2)}+\cdots+B^{(k)}$$

と任意に分割を行い、

$$\sum_{i+j<k} A^{(j)}B^{(j)} + \sum_{i=1}^{k} A^{(i)}\left(\sum_{j=k-i+1}^{k} B^{(j)}\right)$$

と計算をする。計算の上位ビットに対応する $\sum_{i+j<k} A^{(j)}B^{(j)}$ には、計算誤差を全く含まないことが証明されている。この手法は行列積が主要な計算であり、BLAS を有効に活用することができる。例えば GotoBLAS, Intel Math Kernel Library, ATLAS などは最適化に優れ、マルチコアに対応した関数を提供していることで有名である。例えば行列のサイズが 1000*1000 以上の場合、全計算量の 99%以上が BLAS の行列積関数に依存することになる。このように、優秀なライブラリに多くの計算が依存することから、必要なメモリ量に関するボトルネックと引き換えに提案手法の高速化が達成されている。これは、特に Matlab のようなインタプリタ向きの方法であり、精度保証付きシミュレータの基本アイディアのひとつとなる可能性がある。また行列積から行列の総和への無誤差変換も達成できる。この手法と高精度な総和の計算法を合わせると

- 真の結果に対して、隣接する浮動小数点数に丸めた結果
- 真の結果に対して最近点に丸めた結果
- 真の結果に対する符号
- 任意精度を持つ結果

を達成可能となる。

また、区間演算に関する応用も可能である。行列積 AB が与えられたときに、その上限と下限をタイトに包みこむことが可能となった。この応用として、より高い条件数の行列の正則性を証明することに成功している。

(c-3) 計算幾何学の基礎判定問題の精度保証付きアルゴリズム

シミュレーションに現れる計算幾何学の基礎的な問題である点と直線の位置関係と、点と平面との位置関係を判定する高速かつロバストなアルゴリズムの開発を行った（論文[]）。点と直線の位置関係とは、2点により向き付けされた直線を定義し、点がその直線の左右または直線上を判定する問題である（図14）。

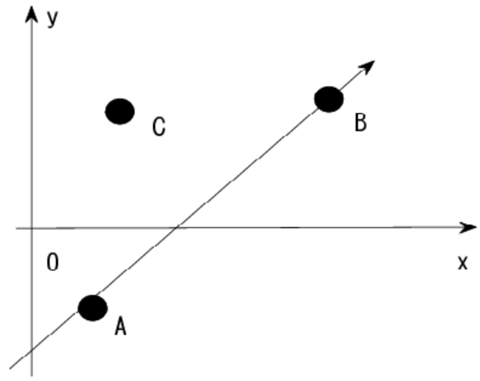

図14. 点と直線の位置関係

また点と平面の位置関係とは3点による平面と、点が与えられたときに、点が直線の上下または平面上を判定する問題である（図15）。

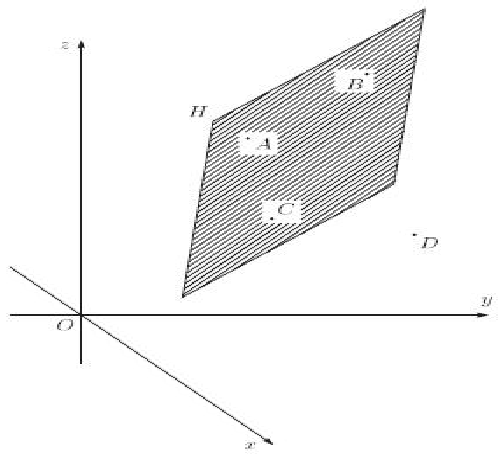

図15. 点と平面の位置関係

これらの問題は低次元の行列式の符号により解決されることが知られている。例えば2点A(a_x,a_y)からB(b_x,b_y)の向きに直線があり、点C(c_x,c_y)との位置関係を判断するためには

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & 1 \\ b_x & b_y & 1 \\ c_x & c_y & 1 \end{vmatrix} = (a_x - c_x)(b_y - c_y) - (a_y - c_y)(b_x - c_x)$$

という行列式の符号を計算する。点と直線が近接しているとき、浮動小数点演算の誤差により、位置関係を間違えて判断されることがある。この問題により、計算幾何学のアルゴリズムが正しく進ま

ず、最終的に意味のない結果が得られることが問題となっていた。Rump-Ogita-Oishiらの高精度な総和のアルゴリズムを点と平面の位置関係の問題に特化することにより、従来手法で最も高速な手法の約80%の計算時間で必ず正しい判定ができるアルゴリズムを開発できた。また、この問題の2次元版である点と直線の位置関係に対しても、ロバストの判定法を提案した。浮動小数点数を用いる先行研究で最も高速な手法よりも、高速な手法を開発できた。このような高速かつロバストな基礎計算を開発できたことにより、効果は応用問題に波及する。例えば点集合に対する凸包の問題がある。この凸包とは、すべての点を包含する最小の凸多角形のことである。点と直線の位置関係の判定を間違えた場合、図16のような結果を得ることがある。

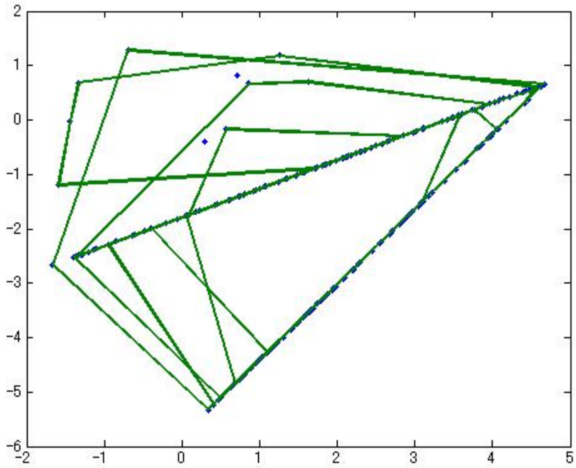

図16. 誤った凸包の計算結果

この判定が正しく解ける場合には図17のような正しい出力を得ることが可能である。

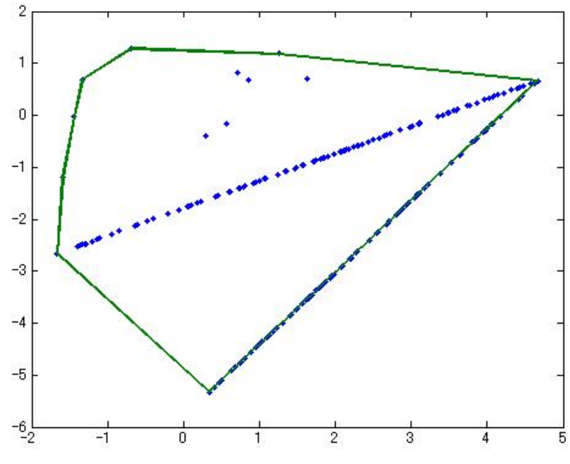

図17. 正しい凸包の計算結果

本提案手法の特徴は、位置関係の判定が簡単であれば、高速に正しい位置関係を知ることができる。また判定が難しいときには、必要最低限度の計算量で正しい位置関係を知ることができる「適応的なアルゴリズム」として位置づけされることである。

その他の応用

線形計画問題の最適点に対する精度保証法を提案した(論文[6])。従来、線形計画問題の最適値については様々な精度保証法が提案されてきたが、本研究ではカントロビッチの定理と連続型ニュートン法を用いて最適点そのものの存在範囲を保証可能となった。表 3 は数値実験結果の一例である。ただし、ta と tv は、それぞれ近似解の計算時間と精度保証に要した時間を表している。

$m+n$	$\alpha\omega$	ρ	$t_a[sec]$	$t_v[sec]$
300	3.78×10^{-6}	3.4×10^{-12}	0.30	0.29
600	1.69×10^{-5}	5.0×10^{-12}	0.79	2.17
900	4.22×10^{-4}	2.9×10^{-11}	1.9	7.4
1200	0.0049	7.3×10^{-11}	3.9	17.4
1500	0.083	3.8×10^{-10}	7.2	33.4
1800	2.91×10^{-4}	1.8×10^{-11}	13	59
2100	0.189	4.7×10^{-10}	21	91
2400	0.051	2.1×10^{-10}	37	137
2700	0.029	1.4×10^{-10}	54	184
3000	0.011	8.3×10^{-11}	72	270

表 3. 線形計画問題に対する精度保証結果

この結果から、近似計算のおよそ 4 倍程度の手間で精度保証が実行できていることがわかる。

(2)研究成果の今後期待される効果

本研究の成果は、あらゆる科学技術計算の基盤となるため、今後、多くの新しい数値計算アルゴリズムが開発されることが可能と期待できる。すなわち、本研究の成果を利用した高速かつ高精度な革新的計算アルゴリズムが開発されると、医療・情報産業において、人が安心して利用できる信頼性の高い実用的なシミュレータを実現できるようになるであろう。

4.2 「東京女子大学」グループ

(1)研究実施内容及び成果

2008 年度より東京女子大学に新グループを発足し、高精度計算アルゴリズムの開発を主に研究した。具体的には、下記のような成果を得た(〈・〉内はキーワードを表す)。

(b-3) 任意の結果精度を持つベクトルの総和及び内積計算法を開発した(論文[10,11])。一般的に、結果精度を保証するアルゴリズムの開発は困難であるが、本方式では、問題の難しさに応じて自動的に計算精度を増加させる適応的な方法となっているため、必要最小限に近い計算量で所望の精度を持つ結果を得ることが可能となった。
〈高精度計算〉, 〈エラーフリー変換〉

(c-4) 高精度な行列分解法を考案した。これは、Rump による悪条件行列の高精度な近似逆行列を求める手法を基礎としており、LU 分解、QR 分解、コレスキー分解等に適用できるフレームワークである。
〈線形計算〉, 〈高精度計算〉

(c-5) 大規模スパース系に対する高速かつ高精度な行列ベクトル積アルゴリズムを開発した。本研究で開発してきた高精度な内積計算アルゴリズムを、共役勾配法系統の反復解法に適用し、

通常の倍精度計算では収束しないような例に対して、収束が改善されることを確認した。
〈連立一次方程式〉,〈反復解法〉,〈高精度計算〉

これらの成果により、研究グループとしての目的は十分に達成できた。以下では、各項目別の詳細な研究内容と成果について述べる。

(b-3) 任意の結果精度を持つベクトルの総和及び内積計算法

結果の精度を保証する新しい高速なベクトルの総和及び内積計算アルゴリズムを開発した。これは、ベクトルの総和計算・内積計算は、あらゆる数値線形代数の基礎となるため、非常に重要である。今、ベクトル $p=(p_1, p_2, \cdots, p_n)$ の総和 $\sum_{i=1}^{n} p_i$ を計算したいとする。ただし、各成分は浮動小数点数とする。これまで「各演算の精度」を任意に高くする方式の開発に成功していた。これは、Knuth の加算に対する定理・アルゴリズムを利用した、ベクトルの総和のエラーフリー変換(Error-free Transformation)という方法に基づくものであった。今回、Knuth のアルゴリズムを用いない、まったく新しい総和の計算アルゴリズムを開発した(図18)。これは「最終的に得られる結果の精度」を保証できる革新的なアルゴリズムであり、具体的には、総和の真値に対してほぼ最良の近似(結果が最後の桁まで正しい)となることが理論的に保証されている。さらに、真値の符号だけ知りたい場合は、その符号のみ効率的に計算することや、結果を得られる精度を任意に高くすること、あるいは最良近似(真値の最近点への丸め)を得ることも可能である。

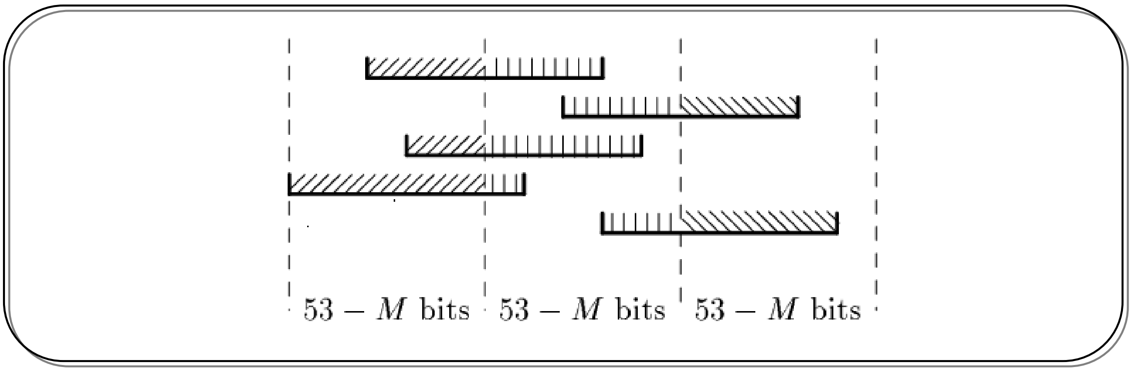

図 18. 高精度総和計算の基本アイディア

これを実現するために、図 19 のような浮動小数点数の分離法を提案した。これは、浮動小数点演算のみからなる方式であるため、非常に高速である。

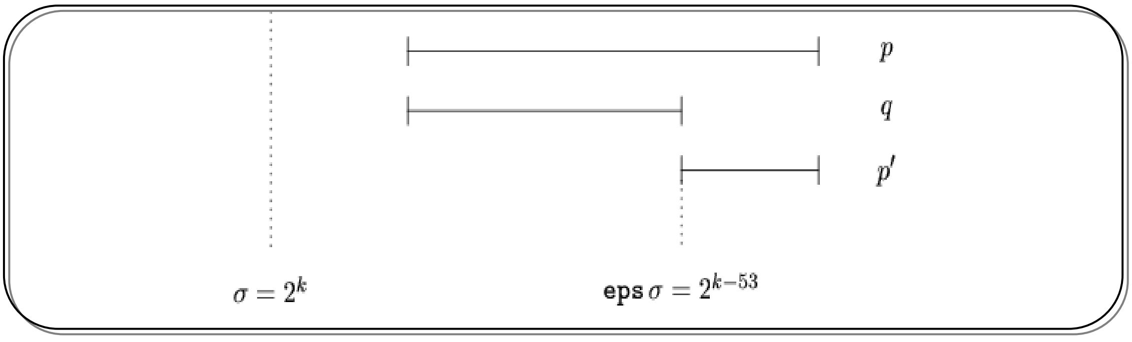

図 19. 固定された点での分離

本方式の優れている点は、必要なだけの精度をもつ結果を、理論上、ほぼ必要最小限の計算量で計算できるところにあり、さらに実際に数値実験でもその高速性を示した。これが実現できたのは、アルゴリズムが、プログラミングのレベルにおいても、コンパイラによる最適化の恩恵を最大限に引き出せる構造になっているからである。すなわち、図 20 に示すように、ベクトルに対する新しい総和の無誤差変換において、ベクトルのすべての要素に対する演算に依存関係がなく、さらにその演算にコンパイラの最適化を妨げる分岐等が存在しない。

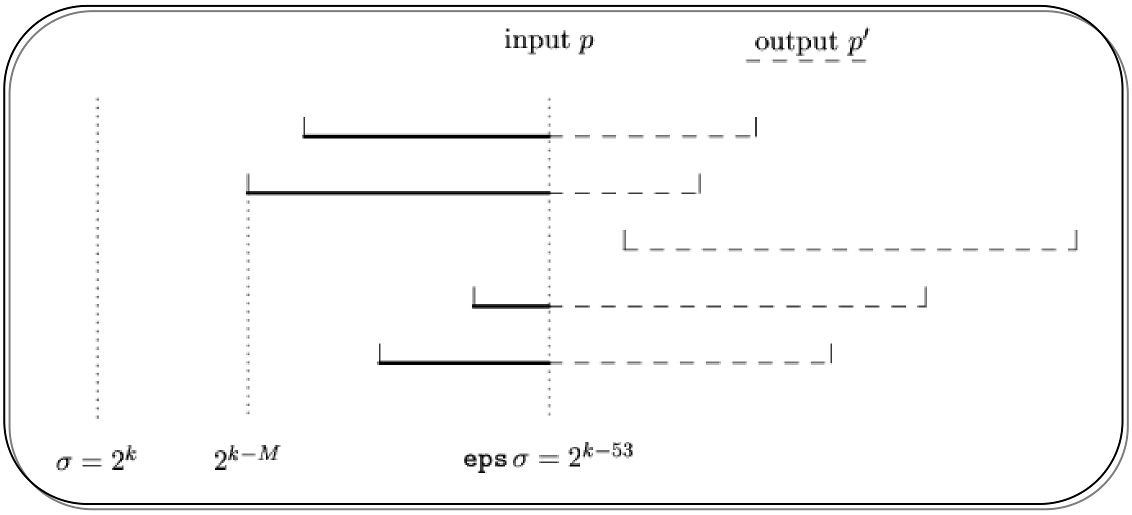

図 20. ベクトルに対する新しい総和の無誤差変換

図21は、Intel Pentium 4 (2.53GHz), Intel Visual Fortran 9.1 を用いた各総和計算アルゴリズムに対する数値実験の結果である。提案方式(AccSum)の性能が非常に高いことを示している。

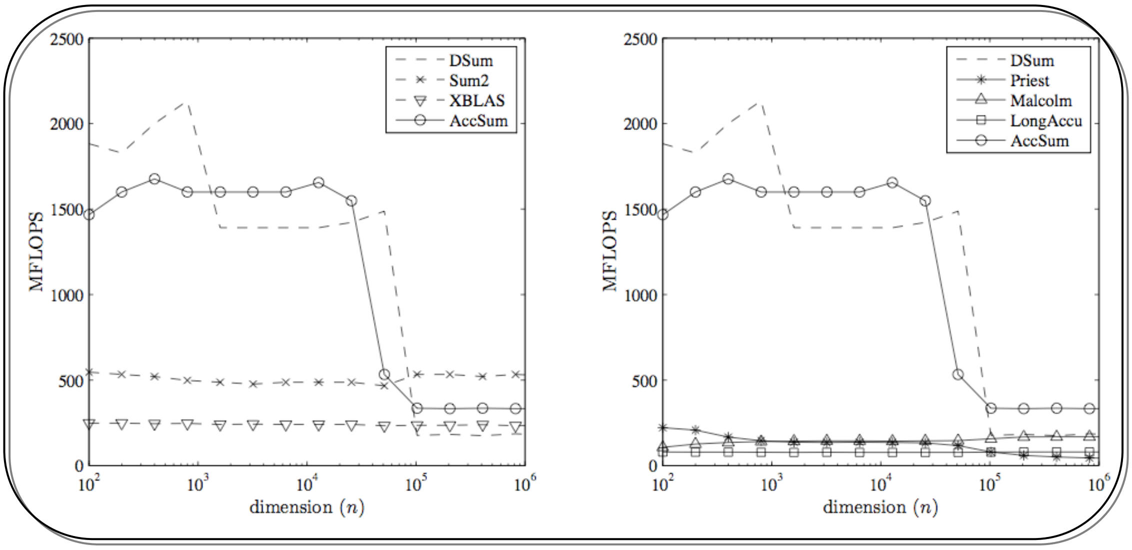

図 21. 各総和計算アルゴリズムの性能評価(横軸:次元数、縦軸:MFLOP/s)

この新しいアルゴリズムによって、従来、我々が開発した世界最高速の高精度アルゴリズム(b-1)を上回る高速性が達成され、しかも結果の精度まで保証されるという、最高の結果を得るに至った。

(c-4) 高精度な行列分解

本研究では、LU 分解、コレスキー分解、特異値分解などの行列分解を高精度に行う方式を開発した。これは、Rump による悪条件行列の高精度な近似逆行列を求める手法を基礎としており、多くの行列分解を統一的に扱うフレームワークを与えている。実際には、行列 A に対し、その分解をするのではなく、逆行列の分解の近似 X,Y を高精度に求めていると解釈できる:

$$A^{-1} \fallingdotseq X * Y$$

高精度な行列分解アルゴリズムの基本的な構造は下記のようになる。

```
k := 1;   X := I;   Y := I;
while  (良い行列分解が得られるまで)
    T := Y * A * X;            // k倍精度で計算し、浮動小数点数に丸める
    [C,E] := 行列分解(T);    // T の行列分解をする (T ≒ C * E)
    G := inv(C);        // C の近似逆行列を計算
    H := inv(E);        // Eの近似逆行列を計算
    X := X * H;         // k倍精度で計算し、結果をk個の行列の和で表現
    Y := G * Y;         //  基本精度で計算
    k := k + 1;
end
```

行列分解は、数値線形代数の基本であるため、例えば、悪条件な係数行列を持つ連立一次方程式の近似解を効率的に求めることや、行列の条件数を精密に求めることもできる。

実際に、MATLAB による計算例を挙げる(図 23)。条件数の高い行列 A を与えたときの結果である。順に、det(sym(A,'f'))によって数式処理を用いた正確な行列式の値(真の値は、1)、det(A)によって近似計算で得られた値(-598669)、accvdet(A)によって提案手法を用いて精度保証された値が得られている。すなわち、近似計算では符号も正しくない間違った結果が得られているが、本提案手法では、真の行列式の値を含む非常にシャープな区間が得られていることがわかる。

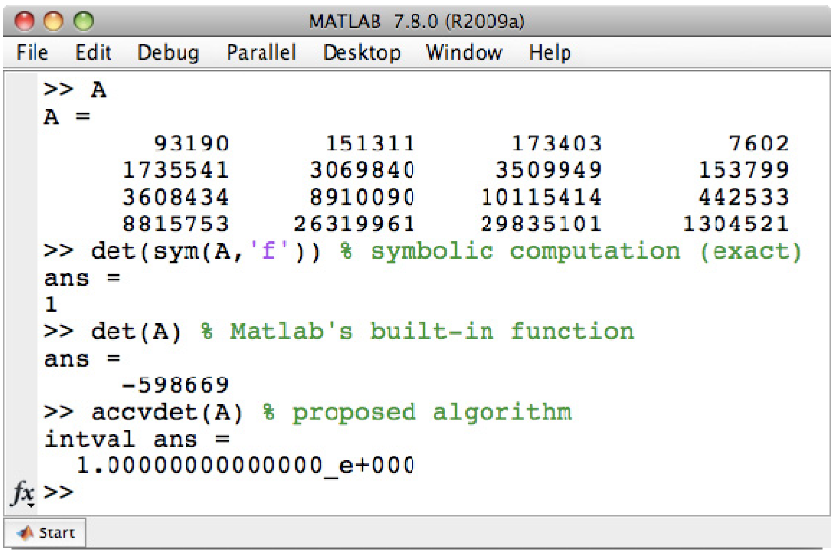

図 23. 行列式の精度保証

（c-5）大規模スパース系に対する高速かつ高精度な行列ベクトル積アルゴリズム

実際の数値シミュレーションでは、非常に大規模なスパース行列を係数行列に持つ連立一次方程式を解く必要がある。大規模問題に対しては、共役勾配法等の反復解法が有効であることが知られており、その中では行列ベクトル積や内積計算を繰り返し実行する。このとき、それらに対する丸め誤差の影響で、反復解法が収束しない場合がある。

そこで、本研究で開発してきた高精度な内積計算アルゴリズムを、共役勾配法系統の反復解法である BICGSTAB 法に適用し、収束が改善されることを確認した（図 22）。

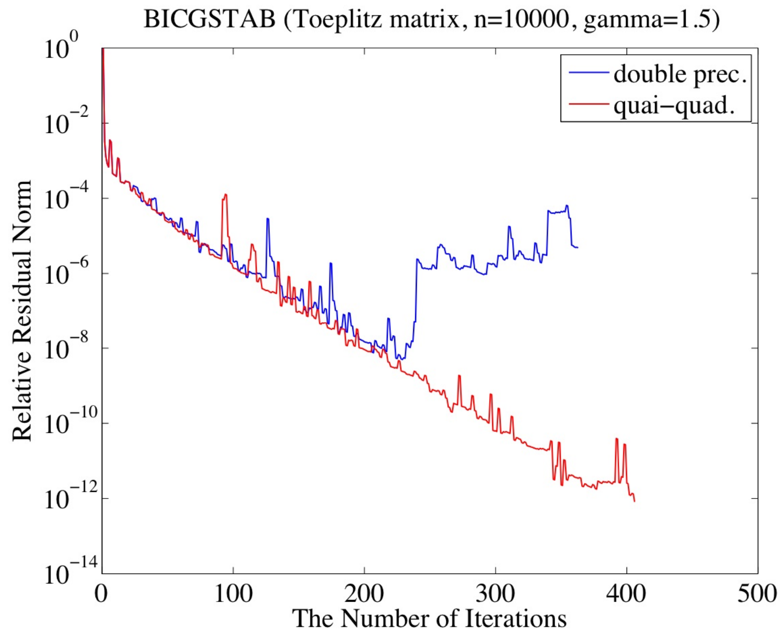

図 22. BICGSTAB 法の残差収束履歴（青線：倍精度、赤線：4倍精度相当）

本提案方式（4倍精度相当）の計算コストは、理論的には従来方式（倍精度）の12倍程度であるが、実際の計算時間で比較すると、逐次計算では4倍程度で済む。さらに、OpenMP による並列計算では約1．2倍、すなわち、倍精度計算とほとんど変わらないコストで4倍精度相当の計算が達成できることになる。これについては、メモリバンド幅が計算性能に直結するような計算機環境では、データの転送量に対する計算量の比率が高いことが、計算性能の点で望ましいことから、本提案方式のパフォーマンスが非常に高くなると考えられる。

(2)研究成果の今後期待される効果

早稲田大学グループと同様に、本研究の成果は、あらゆる科学技術計算の基盤となるため、今後、多くの新しい数値計算アルゴリズムが開発されることが可能と期待できる。

§5 成果発表等

(1)原著論文発表　(国内(和文)誌 8 件、国際(欧文)誌 23 件)

[1] S. Oishi, T. Ogita, S. M. Rump: Iterative Refinement for Ill-conditioned Linear Systems, Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics, to appear.
[2] T. Ogita, S. Oishi: Fast Verified Solutions of Linear Systems, Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics, to appear.
[3] K. Ozaki, T. Ogita, S. M. Rump, S. Oishi: Adaptive and Efficient Algorithm for 2D Orientation Problem, Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics, to appear.
[4] Y. Nakaya, T. Nishi, S. Oishi and M. Claus: Numerical Verification of Five Solutions inTwo-transistor Circuits, Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics, to appear.
[5] S. Miyajima, T. Ogita, S. M. Rump, S. Oishi: Fast Verification for All Eigenpairs in Symmetric Positive Definite Generalized Eigenvalue Problem, Reliable Computing, to appear.
[6] S. Oishi and K. Tanabe: Numerical Inclusion of Optimum Point for Linear Programming, JSIAM Letters, Vol. 1 (2009), 5-8.
[7] T. Ogita, S. Oishi: Tight Enclosures of Solutions of Linear Systems, International Series of Numerical Mathematics, 157 (2009), 167-178.
[8] N. Yamanaka, T. Ogita, S. M. Rump, S. Oishi: A Parallel Algorithm for Accurate Dot Product, Parallel Computing, 34:6-8 (2008), 392-410.
[9] T. Nishi, T. Ogita, S. Oishi, S. M. Rump: A Method for the Generation of a Class of Ill-Conditioned Matrices, Proceedings of 2008 International Symposium on Nonlinear Theory and its Applications, Budapest, Republic of Hungary, 2008, 53-56.
[10] S. M. Rump, T. Ogita, S. Oishi: Accurate Floating-Point Summation Part II: Sign, K-fold Faithful and Rounding to Nearest, SIAM Journal on Scientific Computing, 31:2 (2008), 1269-1302.
[11] S. M. Rump, T. Ogita, S. Oishi: Accurate Floating-Point Summation Part I: Faithful Rounding, SIAM Journal on Scientific Computing, 31:1 (2008), 189-224.
[12] T. Yamamoto, S. Oishi, Q. Fang. Discretization principles for linear two-point boundary value problems, II., Numer. Funct. Anal. Optimz., 29 (2008), 213-224.
[13] S. Oishi, K. Tanabe, T. Ogita, S. M. Rump: Convergence of Rump's Method for Inverting Arbitrarily Ill-conditioned Matrices, Journal of Computational and Applied Mathematics, 205:1 (2007), 533-544.
[14] S. M. Rump, T. Ogita: Super-fast Validated Solution of Linear Systems, Journal of Computational and Applied Mathematics, 199:2 (2007), 199-206.
[15] K. Ozaki, T. Ogita, S. Miyajima, S. Oishi, S. M. Rump: A Method of Obtaining Verified Solutions for Linear Systems Suited for Java, Journal of Computational and Applied Mathematics, 199:2 (2007), 337-344.
[16] 宮島 信也, 荻田 武史, 大石 進一: 実対称行列の各固有対の精度保証付き数値計算法, 日本応用数理学会論文誌, 16:4 (2006), 535-552.
[17] 尾崎 克久, 荻田 武史, S. M. Rump, 大石 進一: 点と平面との位置関係を判定する高速かつロバストなアルゴリズム, 日本応用数理学会論文誌, 16:4 (2006), 553-562.
[18] 大石 進一, 荻田 武史, 太田 貴久: 高精度内積計算アルゴリズムを用いた連立一次方程式の精度保証付き数値計算法, シミュレーション, 25:5 (2006), 170-178.
[19] 荻田 武史, 大石 進一: 連立一次方程式のメモリ量を低減した精度保証付き数値計算法, シミュレーション, 25:5 (2006), 179-184.
[20] T. Yamamoto, S. Oishi: A Mathematical Theory for Numerical Treatment of Nonlinear Two-Point Boundary Value Problems, Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics, 23:1 (2006), 31-62.
[21] 宮島 信也, 荻田 武史, 大石 進一: 実対称行列の各固有値に対する精度保証付き数値計算法, 日本応用数理学会論文誌, 15:3 (2005), 253-268.

[22] 太田 貴久，荻田 武史，S. M. Rump，大石 進一: 悪条件連立一次方程式の精度保証付き数値計算法，日本応用数理学会論文誌，15:3 (2005)，269-287.
[23] T. Ogita, S. M. Rump, S. Oishi: Accurate Sum and Dot Product, SIAM Journal on Scientific Computing, 26:6 (2005), 1955-1988.
[24] 荻田 武史，大石 進一: 大規模連立一次方程式のための高速精度保証法，情報処理学会論文誌: 数理モデル化と応用，46:SIG10 (TOM12) (2005)，10-18.
[25] S. Murashige, S. Oishi: Numerical Verification of Solutions of Nekrasov's Integral Equation, Computing, 75:1 (2005), 15-25.
[26] T. Ogita, S. Oishi: Fast Inclusion of Interval Matrix Multiplication, Reliable Computing, 11:3 (2005), 191-205.
[27] K.Tanaka, S. Murashige, S.Oishi: On necessary and sufficient conditions for numerical verification of double turning points, Numerische Mathematik, 97:3 (2004), 537-554.
[28] R. B. Kearfott, M. Neher, S. Oishi, and F. Rico: Libraries, Tools, and Interactive Systems for Verified Computations: Four Case Studies, in Numerical Software with Result Verification (R. Alt, A. Frommer, R. B. Kearfott, and W. Luther eds.), Lecture Notes in Computer Science, 2991, Springer-Verlag, Heidelberg, 2004.
[29] S. Miyajima, T. Ogita, K. Ozaki, S. Oishi: Fast Error Estimation for Eigenvalues of Symmetric Matrix without Directed Rounding, Proceedings of the 2004 International Symposium on Nonlinear Theory and its Applications, Fukuoka, Japan, 2004, 167-170.
[30] T. Ogita, S. M. Rump, S. Oishi: Accurate Sum and Dot Product with Applications, Proceedings of the 2004 IEEE International Symposium on Computer Aided Control Systems Design, Taipei, Taiwan, 2004, 152-155.
[31] 丸山 晃佐，荻田 武史，中谷 祐介，大石 進一: 実対称定値一般化固有値問題のすべての固有値の精度保証付き数値計算法，電子情報通信学会論文誌，J87-A:8 (2004)，1111-1119.

(2)その他の著作物(総説、書籍など)

[1] 大石 進一: いま問われる計算の品質とは？，数学セミナー，47:11_566 (2008 年 11 月号)，10-14.
[2] 荻田 武史: 品質を落とさない数値計算法 ～無誤差変換と高精度計算～，数学セミナー，47:11_566 (2008 年 11 月号)，15-19.
[3] 大石 進一: 線形代数と数値計算， 数学セミナー，47:11_566 (2008 年 11 月号)，20-23.
[4] 尾崎 克久: 誤らない計算幾何学アルゴリズム，数学セミナー，47:11_566 (2008 年 11 月号)，36-39.
[5] 大石 進一，荻田 武史: 数値シミュレーションを支える精度保証技術，情報処理，48:10 (2007)，1103-1110.
[6] 荻田 武史，大石 進一: 精度保証付き数値計算とシミュレーション，分子シミュレーション研究会会誌「アンサンブル」，9:2 (2007)，11-16.
[7] S. M. Rump(荻田 武史訳): 計算機援用証明 II，応用数理，14:4 (2004)，44-57.
[8] S. M. Rump(荻田 武史訳): 計算機援用証明 I，応用数理，14:3 (2004)，2-11.

(3)国際学会発表及び主要な国内学会発表

① 招待講演 (国内会議 14 件、国際会議 10 件)

[1] 大石 進一 (早大/JST): 浮動小数点数の無誤差変換と応用，2009 年度数値解析研究集会，長野(2009/9/1-3).
[2] 荻田 武史 (東女大/JST): ロバストな行列分解アルゴリズムとその応用，2009 年並列／分散／協調処理に関する「仙台」サマー・ワークショップ(SWoPP 仙台 2009)，仙台 (2009/8/4-6)

[3] S. Oishi (Waseda Univ./JST): Error free transformations of floating point numbers and its applications to constructing error free algorithms, Symbolic Numeric Computation (SNC 2009), Kyoto, Japan, (2009/8/3-5).
[4] 荻田 武史（東女大/JST): 線形問題の精度保証付き高精度数値計算法，デジタル解析学セミナー，早稲田大学（2009/7/22）
[5] S. Oishi (Waseda Univ./JST): Numerical existence theorem for solutions of fixed point type equations and its applications, International Conference on Engineering and Computational Mathematics (ECM2009), The Hong-Kong Polytechnic University, Hong-Kong (2009/5/27-29).
[6] 荻田 武史（東女大/JST): 高精度な行列分解アルゴリズムとその応用，研究会「アルゴリズムによる計算科学の融合と発展」，筑波大学（2009/4/22-23）
[7] Shin'ichi Oishi (Waseda Univ./JST): Applications of Error Free Transformations, International Workshop on Verified Numerical Computations and Related Topics, University of Karlsruhe, Germany, March 9, 2009.
[8] 大石進一(早大/JST)：Maxwell 方程式によるナノ領域電磁界計算の精度保証，2009 年春季第 56 回応用物理学関係連合講演会（シンポジウム：ナノフォトニクスにおけるナノ加工の最前線と理論基盤），筑波大学，2009 年 3 月 30 日．
[9] 大石 進一（早大/JST): 浮動小数点数の無誤差変換と精度保証付き数値計算，第 20 回 RAMP シンポジウム，東京工業大学西9号館2F デジタル多目的ホール，2008 年 10 月 30 日．
[10] 大石 進一（早大/JST): 精度保証付き数値計算の現状-基礎としての線形系から非線形問題の計算機援用証明までのサーベイ-，研究集会「非線型波動の数理と物理」 九州大学筑波地区総合研究棟，2008 年 11 月 7 日．
[11] 大石進一(早大/JST)：精度保証付き数値計算から見たナノ光シミュレーション，学振 130 号委員会，2008 年 11 月 10 日．
[12] Shin'ichi Oishi (Waseda Univ./JST): Accurate and Fast Sum of Floating Point Numbers and Applications to Verification Algorithms, The 13th GAMM - IMACS International Symposium on Scientific Computing, Computer Arithmetic and Verified Numerical Computations, The University of Texas at El Paso on September 29 - October 3, 2008.
[13] Shin'ichi Oishi: Numerical Uniqueness and Existence Theorem for Solution of Lippmann-Schwinger Equation，九州大学数理学府 21 世紀 COE シンポジウム特別講演 (2007/10/1-4)
[14] Shin'ichi Oishi: Fast and Accurate Dot Product Algorithm and its Applications to Verified Numerical Computation, The 3rd East Asia SIAM Conference, Xiamen, China (2007/11/2-5 招待1時間全体講演）
[15] Shin'ichi Oishi: Iterative Refinement for Ill-Conditioned Linear Systems, International Workshop on Numerical Validation in Current Hardware Architectures at Dagstuhl Seminar, Germany (2008/1/7-11，招待講演）
[16] 大石 進一： 高速で高精度な浮動小数点数の内積計算法と精度保証付き数値計算，日本数学会（企画特別講演）（2008/3/22，招待1時間講演）大阪府立大学
[17] 大石 進一：高精度な Cholesky 分解，第 10 回環瀬戸内応用数理研究部会シンポジウム，応用数理学会，(2006/7/8)
[18] 大石 進一：精度保証付き数値計算学の確立を目指して，電子情報通信学会全国大会，名城大学，(2007/3/20)
[19] 大石 進一（早大／JST)： 数値線形代数を中心とした精度保証付き数値計算の研究の最近の状況，Computer Algebra - Design of Algorithms, Implementations and Applications 2005，京都大学数理解析研究所，2005 年 12 月 20 日
[20] S. Oishi (Waseda Univ./JST): Numerical verification for solutions of finite dimensional sparse linear equations using iterative methods, Workshop on Numerical Analysis of Flow Problems and Validated Computations, NAGASAKI WASHINGTON HOTEL, Nagasaki, Japan,

November 21, 2005

[21] 大石 進一（早大／JST）: 疎連立一次方程式の解の反復解法を用いた数値的精度保証法, 日本応用数理学会環瀬戸内応用数理研究部会 第 9 回シンポジウム, 2005 年 11 月 12 日

[22] S. Oishi (Waseda Univ./JST): Numerical Verification for Solutions of Linear Systems, Algebraic and Numerical Algorithms and Computer-assisted Proofs, Dagstuhl Seminar, Dagstuhl, Germany, September 29, 2005

[23] T. Ogita (JST/Waseda Univ.): Fast and Accurate Computation of Sum and Dot Product, Algebraic and Numerical Algorithms and Computer-assisted Proofs, Dagstuhl Seminar, Dagstuhl, Germany, September 29, 2005

[24] 大石 進一（早大／JST）: 数値線形計算の精度保証に関する最新の発展 －任意に精度を変更でき、大規模な問題を扱え、高速に計算するには－, 力学系の研究 － トポロジーと計算機による新展開, 京大数理解析研究所, 2005 年 6 月 22 日

② 口頭発表 （国内会議 76 件、国際会議 74 件）

[1] 高安亮紀, 大石進一, 久保隆徹: 常微分方程式の精度保証付き誤差評価法, 2009 年度数値解析研究集会, 長野(2009/9/1-3).

[2] T. Ogita: Accurate and Verified Computation of Matrix Determinant, The 24th International Technical Conference on Circuits/Systems, Computers and Communications (ITC-CSCC 2009), Jeju Island, Korea, July. 5-8.

[3] K. Ozaki, T. Ogita, S. Oishi: Fast Filter for Verified Convex Hull and its Performance, The 24th International Technical Conference on Circuits/Systems, Computers and Communications (ITC-CSCC 2009), Jeju Island, Korea, July. 5-8.

[4] N. Yamanaka, T. Okayama, S. Oishi, T. Ogita: A fast automatic integration algorithm using double exponential formula based on verification theory, The 24th International Technical Conference on Circuits/Systems, Computers and Communications (ITC-CSCC 2009), Jeju Island, Korea, July. 5-8.

[5] Akitoshi Takayasu, Shin'ichi Oishi, Takayuki Kubo: Numerical verification for solutions to nonlinear two-point boundary value problems with finite element method, The 24th International Technical Conference on Circuits/Systems, Computers and Communications (ITC-CSCC 2009), Jeju Island, Korea, July. 5-8.

[6] 尾崎 克久, 荻田 武史, 大石 進一:Level 3 BLAS を用いた高精度な行列積に対する事前誤差評価, 第 38 回 数値解析シンポジウム, 熱川ハイツ, 静岡県賀茂郡, 2009/6/15-17.

[7] 山中脩也, 岡山友昭, 大石 進一, 荻田 武史:精度保証理論を用いた DE 公式の高速数値積分計算, 第 38 回 数値解析シンポジウム, 熱川ハイツ, 静岡県賀茂郡, 2009/6/15-17.

[8] 高安亮紀, 大石進一, 久保隆徹: 線形2点境界値問題の精度保証付き数値計算法, 第 38 回 数値解析シンポジウム, 熱川ハイツ, 静岡県賀茂郡, 2009/6/15-17.

[9] 南畑 淳史, 尾崎 克久, 荻田 武史, 大石 進一:マルチプロセスを用いた連立一次方程式の精度保証法の実装, 第 28 回 日本シミュレーション学会大会, 芝浦工業大学, 豊洲キャンパス, 2009/6/13.

[10] S. Oishi: Error free transformations of floating point numbers and its applications, The 5th East Asia SIAM Conference, Brunei, June 8-11, 2009.

[11] T. Ogita, S. Oishi: Accurate Inverse Cholesky Factorization, The 5th East Asia SIAM Conference, Brunei, June 8-11, 2009.

[12] K. Ozaki, T. Ogita, S. Oishi: Verified Convex Hull based on Graham's Algorithm, The 5th East Asia SIAM Conference, Brunei, June 8-11, 2009.

[13] N. Yamanaka, T. Okayama, S. Oishi, T. Ogita: A fast automatic integration algorithm using double exponential formula, The 5th East Asia SIAM Conference, Brunei, June 8-11, 2009.

[14] Akitoshi Takayasu, Shin'ichi Oishi, Takayuki Kubo: Guaranteed error estimate for solutions to linear two-point boundary value problems, The 5th East Asia SIAM Conference, Brunei,

June 8-11, 2009.
[15] S. Oishi: Error free transformations of floating point numbers and its applications, International Conference on Engineering and Computational Mathematics (ECM2009), The Hong-Kong Polytechnic University, Hong-Kong (2009/5/27-29).
[16] K. Ozaki, T. Ogita, S. Oishi: A priori error estimation for accurate matrix multiplication by using optimized BLAS, International Conference on Engineering and Computational Mathematics (ECM2009), The Hong-Kong Polytechnic University, Hong-Kong (2009/5/27-29).
[17] S. Oishi: Some Applications of Verified Numerical Computations and Error Free Transformations, 2009 International Workshop on Numerical Verification and its Applications, Miyakojima, Japan (2009/3/22-29).
[18] S. M. Rump: Accurate Summation and Dot Products, 2009 International Workshop on Numerical Verification and its Applications, Miyakojima, Japan (2009/3/22-29).
[19] T. Nishi, S. M. Rump, S. Oishi: A conjecture and its partial proof on a kind of Diophantous equations related to the generation of ill-conditioned matrices, 2009 International Workshop on Numerical Verification and its Applications, Miyakojima, Japan (2009/3/22-29).
[20] T. Ogita: Accurate Matrix Factorization and Applications, 2009 International Workshop on Numerical Verification and its Applications, Miyakojima, Japan (2009/3/22-29).
[21] C. Keil: Lurupa - Rigorous Error Bounds in Linear Programming, 2009 International Workshop on Numerical Verification and its Applications, Miyakojima, Japan (2009/3/22-29).
[22] K. Ozaki, T. Ogita, S. Oishi: Convex Hull by Verified Computations, 2009 International Workshop on Numerical Verification and its Applications, Miyakojima, Japan (2008/3/22-29).
[23] N. Yamanaka, S. Oishi, T. Ogita: A Verified Automatic Multiple Integration Algorithm using Double Exponential Formula, 2009 International Workshop on Numerical Verification and its Applications, Miyakojima, Japan (2009/3/22-29).
[24] A. Takayasu, T. Kubo, S. Oishi: Guaranteed error estimates for solutions to nonlinear 2 point boundary value problems, 2009 International Workshop on Numerical Verification and its Applications, Miyakojima, Japan (2009/3/22-29).
[25] S. M. Rump: Error-Free Transformations and ill-conditioned problems, International workshop on verified computations and related topics (IWVC 2009), Karlsruhe, Germany (2009/3/7-10).
[26] C. Keil, Lurupa - Rigorous Error Bounds in Linear Programming, 平成 21 年応用数理学会, 研究部会連合発表会, 京都大学(2009/3/8-9).
[27] 荻田 武史: 高精度な行列分解とその応用, 平成 21 年応用数理学会, 研究部会連合発表会, 京都大学(2009/3/8-9).
[28] 尾崎 克久, 荻田 武史, 大石 進一, 行列式の和を利用した点と直線の位置関係のロバストな判定法について, 平成 21 年応用数理学会, 研究部会連合発表会, 京都大学(2009/3/8-9).
[29] 山中 脩也, 大石 進一, 荻田 武史, DE 公式を用いた精度保証付き多次元自動積分法, 平成 21 年応用数理学会, 研究部会連合発表会, 京都大学(2009/3/8-9).
[30] 高安 亮紀, 大石 進一, 久保 隆徹, 2 階常微分方程式の非線形 2 点境界値問題に対する精度保証法, 平成 21 年応用数理学会, 研究部会連合発表会, 京都大学(2009/3/8-9).
[31] S. M. Rump: Accurate Summation and Dot Products, The 4th International Conference on High Performance Scientific Computing, Hanoi, Vietnam (2009/3/2-6).
[32] T. Ogita, S. M. Rump, S. Oishi: Fast Quasi-Quadruple Precision Computation of Sparse Matrix-Vector Product, The 4th International Conference on High Performance Scientific

Computing, Hanoi, Vietnam (2009/3/2-6).
[33] K. Ozaki, T. Ogita, S. Oishi: Parallel and Accurate Matrix Multiplication based on Optimized BLAS, The 4th International Conference on High Performance Scientific Computing, Hanoi, Vietnam (2009/3/2-6).
[34] 大石 進一, 西 哲生, 中谷 祐介: 線形抵抗回路の動作点の数値的精度保証法 電子情報通信学会非線形問題研究会, ホテルマリックス(宮崎)(2009/1/23).
[35] 西 哲生, 大石 進一, 中谷 祐介: 行列式が1の3次整数行列の一生成法 電子情報通信学会回路とシステム研究会, ホテルマリックス(宮崎)(2009/1/23).
[36] 大石 進一, 田邊 國士: 線形計画問題の最適解の精度保証 電子情報通信学会非線形問題研究会, 石川県文教会館 (2008/12/9).
[37] 山中脩也, 大石進一, 荻田武史: DE 公式を用いた高速精度保証付き数値積分法の改良, RIMS 研究集会 数値解析における理論・手法・応用, 京都大学数理解析研究所 (2008/11/14).
[38] 西 哲生, 中谷 祐介, 大石 進一: 線形受動抵抗回路の解の精度保証について 電子情報通信学会非線形問題研究会,石巻専修大学 5号館 1F 会議室5(2008/10/14), pp.59-64.
[39] S. Oishi: Numerical Verification of Optimum Point in Linear Programming, The NIMS 2008 Conference & The 4th East Asia SIAM Conference, Daejeon, Korea, Oct. 10-12, 2008, pp.47.
[40] T. Ogita, S. M. Rump, S. Oishi: High Precision and Efficient Computation of Sparse Matrix-Vector Product, The NIMS 2008 Conference & The 4th East Asia SIAM Conference, Daejeon, Korea, Oct. 10-12, 2008.
[41] K. Ozaki, T. Ogita, S. Oishi: A Robust Algorithm for Geometric Predicate by Sum of Determinants, The NIMS 2008 Conference & The 4th East Asia SIAM Conference, Daejeon, Korea, Oct. 10-12, 2008.
[42] N. Yamanaka, T. Ogita, M. Kashiwagi, N. Yamamoto, S. Oishi: Fast Verified Automatic Integration Algorithm Over Finite Interval, The NIMS 2008 Conference & The 4th East Asia SIAM Conference, Daejeon, Korea, Oct. 10-12, 2008.
[43] T. Ogita: Verified Numerical Computation of Matrix Determinant, 13th GAMM - IMACS International Symposium on Scientific Computing, Computer Arithmetic and Verified Numerical Computations (SCAN'08), El Paso, Texas, Sep. 29 - Oct. 3, 2008.
[44] K. Ozaki, T. Ogita, S. M. Rump, S. Oishi: Tight inclusion of matrix multiplication and its portable implementation, 13th GAMM - IMACS International Symposium on Scientific Computing, Computer Arithmetic and Verified Numerical Computations (SCAN'08), El Paso, Texas, Sep. 29 - Oct. 3, 2008.
[45] N. Yamanaka, T. Ogita, M. Kashiwagi, N. Yamamoto, S. Oishi: Fast Verified Automatic Integration Using Double Exponential Formula, 13th GAMM - IMACS International Symposium on Scientific Computing, Computer Arithmetic and Verified Numerical Computations (SCAN'08), El Paso, Texas, Sep. 29 - Oct. 3, 2008.
[46] 荻田 武史: 若手セッションパネル「若手研究者による学会への期待」パネリスト(コーディネータ: 片桐孝洋), 日本応用数理学会 2008 年度年会「計算の品質研究部会」オーガナイズドセッション, 東京大学 柏キャンパス, 柏市 (2008/9/17-19)
[47] 荻田 武史, Siegfried M. Rump, 大石進一: 高精度な疎行列ベクトル積の高速計算, 日本応用数理学会 2008 年度年会「計算の品質研究部会」オーガナイズドセッション, 東京大学 柏キャンパス, 柏市 (2008/9/17-19)
[48] 尾崎 克久, 荻田武史, 大石進一: 高精度な行列乗算のための行列分割の改善について, 日本応用数理学会 2008 年度年会「計算の品質研究部会」オーガナイズドセッション, 東京大学 柏キャンパス, 柏市 (2008/9/17-19)
[49] 山中 脩也, 荻田武史, 柏木雅英, 山本野人, 大石進一: 高速精度保証付き自動積分法

について，日本応用数理学会 2008 年度年会「計算の品質研究部会」オーガナイズドセッション，東京大学 柏キャンパス，柏市 (2008/9/17-19)
[50] T. Ogita, S. M. Rump, S. Oishi: Some Methods to Compute Verified Matrix Determinants, 2008 International Symposium on Nonlinear Theory and its Applications (NOLTA2008), Budapest, Republic of Hungary, Sep. 7-10, 2008.
[51] S. Oishi, T. Ogita, S. M. Rump: Iterative Refinement for Ill-Conditioned Linear Equations, 2008 International Symposium on Nonlinear Theory and its Applications (NOLTA2008), Budapest, Republic of Hungary, Sep. 7-10, 2008.
[52] K. Ozaki, T. Ogita, S. M. Rump, S. Oishi: Accurate Matrix Multiplication by Using Level 3 BLAS Operation, 2008 International Symposium on Nonlinear Theory and its Applications (NOLTA2008), Budapest, Republic of Hungary, Sep. 7-10, 2008.
[53] N. Yamanaka, T. Ogita, M. Kashiwagi, S. Oishi: Fast Verified Automatic Integration Algorithm Using Complex Analysis, 2008 International Symposium on Nonlinear Theory and its Applications (NOLTA2008), Budapest, Republic of Hungary, Sep. 7-10, 2008.
[54] T. Nishi, T. Ogita, S. Oishi, S. M. Rump: A Method for the Generation of a Class of Ill-Conditioned Matrices, 2008 International Symposium on Nonlinear Theory and its Applications (NOLTA2008), Budapest, Republic of Hungary, Sep. 7-10, 2008.
[55] S. Oishi: Calculation of Bessel and Hankel Functions with Guaranteed Accuracy，電子情報通信学会非線形問題研究会，琉球大学 50 周年記念館(2008/6/27).
[56] 大石 進一:「シミュレーション技術の将来展望 -ロードマップの紹介と、人文社会科学分野への展開の可能性-」(ランチオンパネル討論)，第 27 回 日本シミュレーション学会大会，立命館大学，滋賀県草津市 (2008/6/19-20).
[57] 荻田 武史, S. M. Rump，大石 進一: 行列式の精度保証付き数値計算法，第 27 回 日本シミュレーション学会大会，立命館大学，滋賀県草津市 (2008/6/19-20)，発表論文集 pp.79-82.
[58] 尾崎 克久，荻田 武史，大石 進一: ポータブルかつ誤差半径を過大評価しない行列乗算の包含について，第 27 回 日本シミュレーション学会大会，立命館大学，滋賀県草津市 (2008/6/19-20)，発表論文集 pp.75-78.
[59] 山中 脩也，荻田 武史，柏木 雅英，大石 進一: 複素解析を用いた高速精度保証付き自動積分法，第 27 回 日本シミュレーション学会大会，立命館大学，滋賀県草津市 (2008/6/19-20)，発表論文集 pp.83-86.
[60] 尾崎 克久，荻田 武史，大石 進一: Level 3 BLAS を用いて行列乗算の精度を改善する方法について，第 37 回 数値解析シンポジウム，たざわこ芸術村，秋田県仙北市 (2008/6/12-14)，講演予稿集 pp.29-32.
[61] 山中 脩也，荻田 武史，柏木 雅英，山本 野人，大石 進一: DE 公式を用いた高速精度保証付き自動積分法，第 37 回 数値解析シンポジウム，たざわこ芸術村，秋田県仙北市 (2008/6/12-14)，講演予稿集 pp.87-90.
[62] 大石 進一: 悪条件連立一次方程式に対する残差反復法の収束性, 第 37 回 数値解析シンポジウム，たざわこ芸術村，秋田県仙北市 (2008/6/12-14)，講演予稿集 pp.25-28.
[63] 大石 進一: 悪条件連立一次方程式に対する残差反復法, 電子情報通信学会非線形問題研究会, (2008/3/27) 神戸
[64] 山中 脩也，荻田 武史，大石 進一: 誤差項に多重階微分を含む数値積分則の複素解析を用いた精度保証法， 平成 20 年日本応用数理学会研究部会連合発表会，首都大学東京 (2007/3/8-9)
[65] 尾崎 克久，荻田 武史，大石 進一: 区間幅の過大評価を抑える行列乗算の包み込みについて， 平成 20 年日本応用数理学会研究部会連合発表会，首都大学東京 (2007/3/8-9)
[66] 荻田 武史，S. M. Rump，大石 進一: 疎行列とベクトルの高速・高精度な乗算について，平成 20 年日本応用数理学会研究部会連合発表会，首都大学東京 (2007/3/8-9)

[67] S. Miyajima, M. Plum, T. Ogita, S. Oishi: Verifying All Eigenvalues in Generalized Eigenvalue Problem, 2008 International Workshop on Numerical Verification and its Applications, Okinawa, Japan (2008/3/1-7)
[68] N. Yamanaka, T. Ogita, S. Oishi: Verified Automatic Integration Algorithm using Complex Analysis for Some Quadratures with High-Order Derivatives on Error Term, 2008 International Workshop on Numerical Verification and its Applications, Okinawa, Japan (2008/3/1-7)
[69] K. Ozaki, T. Ogita, S. M. Rump, S. Oishi: Tight Inclusion of Matrix Multiplication, 2008 International Workshop on Numerical Verification and its Applications, Okinawa, Japan (2008/3/1-7)
[70] T. Ogita, S. M. Rump, S. Oishi: Fast and High Precision Algorithm for Sparse Matrix-Vector Product, 2008 International Workshop on Numerical Verification and its Applications, Okinawa, Japan (2008/3/1-7)
[71] 荻田 武史: 連立一次方程式の解のシャープな精度保証法，応用数理に関する愛媛ワークショップ「精度保証付き数値計算とその応用」，愛媛大学理学部，松山市 (2007/11/17)
[72] 荻田 武史，S. M. Rump，大石 進一: 大規模疎行列の正定値性の精度保証，研究集会「計算科学の基盤技術としての高速アルゴリズムとその周辺」(代表者:張 紹良)，京都大学数理解析研究所 (2007/11/14-16)
[73] 尾崎 克久，荻田 武史，S. M. Rump，大石 進一: 計算幾何学に現れる行列式の符号に対する高速精度保証法，研究集会「計算科学の基盤技術としての高速アルゴリズムとその周辺」(代表者:張 紹良)，京都大学数理解析研究所 (2007/11/14-16)
[74] T. Ogita, S. M. Rump, S. Oishi: Verification of Positive Definiteness for Large Sparse Matrix, The 3rd East Asia SIAM Conference, Xiamen, China (2007/11/2-5)
[75] K. Ozaki, T. Ogita, S. M. Rump, S. Oishi: An Efficient Method of Applying Accurate Summation Algorithms to 3D Orientation Problem, The 3rd East Asia SIAM Conference, Xiamen, China (2007/11/2-5)
[76] T. Ogita: Fast and Accurate Summation of Floating-point Numbers, Global COE Workshop on Accurate Computations in Numerical Linear Algebra, Kyoto, Japan (2007/10/11)
[77] Shin'ichi Oishi: Numerical Uniqueness and Existence Theorem for Solution of Lippmann-Schwinger Equation to Stationary Scattering Problem, ナノ光デバイスに関する日独セミナー, (2007/9/24-28) 米子市
[78] T. Ogita, S. Oishi: Tight Error Bounds for Approximate Solutions of Linear Systems, 2007 International Symposium on Nonlinear Theory and its Applications (NOLTA2007), Vancouver, Canada (2007/9/16-19)
[79] K. Ozaki, T. Ogita, S. M. Rump, S. Oishi: Accurate Matrix Multiplication with Multiple Floating-point Numbers, 2007 International Symposium on Nonlinear Theory and its Applications (NOLTA2007), Vancouver, Canada (2007/9/16-19)
[80] T. Nishi, Y. Nakaya, T. Ogita, S. Oishi: A Class of Ill-conditioned Nonlinear Algebraic Equations, 2007 International Symposium on Nonlinear Theory and its Applications (NOLTA2007), Vancouver, Canada (2007/9/16-19)
[81] T. Ogita, S. Oishi: (Invited Conference) Lower and Upper Error Bounds of Approximate Solutions of Linear Systems, Conference on Inequalities and Applications '07, Noszvaj, Hungary (2007/9/9-15)
[82] T. Ogita, S. M. Rump, S. Oishi: Fast and Accurate Floating-Point Summation, 6th International Congress on Industrial and Applied Mathematics (ICIAM07), Zurich, Switzerland (2007/7/16-20)
[83] K. Ozaki, T. Ogita, S. M. Rump, S. Oishi: Fast and Adaptive Algorithm for 2D Orientation Problem, 6th International Congress on Industrial and Applied Mathematics (ICIAM07), Zurich, Switzerland (2007/7/16-20)

[84] S. Miyajima, T. Ogita, S. Oishi: Verifying All Eigenpairs in Real Symmetric Positive Definite Generalized Eigenvalue Problem, 6th International Congress on Industrial and Applied Mathematics (ICIAM07), Zurich, Switzerland (2007/7/16-20)
[85] 尾崎 克久，荻田 武史，大石 進一: 連立一次方程式に対する精度保証法の自動選択について，第 36 回 数値解析シンポジウム，ウェルシティ湯河原（湯河原厚生年金会館），熱海市 (2007/6/21).
[86] 宮島 信也，荻田 武史，Siegfried M. Rump，大石 進一: 実対称正定値一般化固有値問題におけるすべての固有対の精度保証，第 36 回 数値解析シンポジウム，ウェルシティ湯河原（湯河原厚生年金会館），熱海市 (2007/6/21).
[87] 山中 脩也，荻田 武史，大石 進一，山本哲朗: ロンバーグ積分を利用した精度保証付き自動積分法，第 36 回 数値解析シンポジウム，ウェルシティ湯河原（湯河原厚生年金会館），熱海市 (2007/6/21).
[88] 荻田 武史，尾崎 克久，大石 進一: 行列式の高速精度保証法，第 26 回 日本シミュレーション学会大会，東京工業大学，横浜市 (2007/6/22).
[89] 尾崎 克久，荻田 武史，大石 進一: 点と直線の位置関係の高速かつ適応的な精度保証法について，第 26 回 日本シミュレーション学会大会，東京工業大学，横浜市 (2007/6/22).
[90] 宮島 信也，荻田 武史，大石 進一: 最小二乗問題における数値解の高速な精度保証法，第 26 回 日本シミュレーション学会大会，東京工業大学，横浜市 (2007/6/22).
[91] 大石 進一: ベッセル関数の精度保証付き数値計算法，日本応用数理学会年会，札幌市 (2007/9/15-16)
[92] 大石 進一: Numerical Uniqueness and Existence Theorem for Solution of Lippmann-Schwinger Equation to Two Dimensional Sound Scattering Problem，平成 19 年日本応用数理学会研究部会・連合発表会，名古屋大学 (2007/3/3-4).
[93] 宮島 信也，荻田 武史，大石 進一: 最小二乗問題における数値解の精度保証，平成 19 年日本応用数理学会研究部会・連合発表会，名古屋大学 (2007/3/3-4).
[94] 山中 脩也，荻田 武史，大石 進一: 台形則と中点則を利用した数値積分の精度保証法，平成 19 年日本応用数理学会研究部会・連合発表会，名古屋大学 (2007/3/3-4).
[95] 尾崎 克久，荻田 武史，大石 進一: 連立一次方程式の数値解に対するハイブリッドな精度保証法について，平成 19 年日本応用数理学会研究部会・連合発表会，名古屋大学 (2007/3/3-4).
[96] Miyajima，T. Ogita，S. M. Rump， S. Oishi： Verified All Eigenpairs of Generalized Eigenvalue Problem, International Workshop on Numerical Verification and its Applications, Waseda University, Tokyo, Japan, February, （2007/3/1）.
[97] K. Ozaki, T. Ogita, S. Oishi: Fast, adaptive and robust algorithm of geometric predicates, International Workshop on Numerical Verification and its Applications, Waseda University, Tokyo, Japan, February, （2007/2/27).
[98] T. Ogita: Adaptive and Verified Floating-Point Computations, International Workshop on Numerical Verification and its Applications, Waseda University, Tokyo, Japan (2007/2/26）.
[99] 荻田 武史: 高速・高精度内積計算と応用，日本シミュレーション学会ワークショップ「ナノ光・ナノ電子系のシミュレーション」，早稲田大学 理工学部，(2007/2/2).
[100] 荻田 武史: 悪条件問題と高精度演算，21 世紀 COE プログラム「プロダクティブ ICT アカデミアプログラム」総合シンポジウム，早稲田大学 理工学部 (2007/1/11-12）.
[101] 中谷 祐介: 回路基本定理の反例の計算機による構成，21 世紀 COE プログラム「プロダクティブ ICT アカデミアプログラム」総合シンポジウム，早稲田大学 理工学部 (2007/1/11-12）.
[102] 荻田 武史，大石 進一: 悪条件行列の行列式の精度保証付き数値計算法，研究集会「数値シミュレーションを支える応用数理」，京大数理解析研究所 (2006/11/27-11/29）.
[103] K. Ozaki, T. Ogita, S. M. Rump, S. Oishi: Fast Adaptive Algorithm of Robust Geometric

Predicates using Floating-Point Arithmetic, 12th GAMM - IMACS International Symposion on Scientific Computing, Computer Arithmetic and Validated Numerics, Duisburg (2006/9/26-29).
[104] S. Miyajima, T. Ogita, S. Oishi: Fast Verification for Each Eigenpair of Symmetric Matrix, 12th GAMM - IMACS International Symposion on Scientific Computing, Computer Arithmetic and Validated Numerics, Duisburg (2006/9/26-29).
[105] 太田 貴久，荻田 武史，大石 進一: 悪条件行列の行列式の精度保証法，日本応用数理学会 2006 年度年会「計算の品質研究部会」オーガナイズドセッション，筑波大学，つくば市 (2006/9/16-18).
[106] 宮島 信也，荻田 武史，大石 進一: 実対称行列の各固有対の高速な精度保証法，日本応用数理学会 2006 年度年会「計算の品質研究部会」オーガナイズドセッション，筑波大学，つくば市 (2006/9/16-18).
[107] 山中 脩也，荻田 武史，大石 進一: 高精度内積演算の並列化について，日本応用数理学会 2006 年度年会「計算の品質研究部会」オーガナイズドセッション，筑波大学，つくば市 (2006/9/16-18)
[108] T. Ogita, S. Oishi: Tight Enclosures of Solutions of Linear Systems, Extended Abstracts of International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics 2006 (ICNAAM2006), Crete, Greece (2006/9/15-19).
[109] S. Oishi, T. Ogita, S. M. Rump: Numerical verification for solutions of finite dimensional sparse linear equations using iterative methods, Extended Abstracts of International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics 2006 (ICNAAM2006), Crete, Greece (2006/9/15-19).
[110] S. Oishi, T. Ogita, S. M. Rump, K. Tanabe: Accurate Cholesky Algorithm and Detection of Positive Definiteness of Ill-Conditioned Matrices, Extended Abstracts of International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics 2006 (ICNAAM2006), Crete, Greece (2006/9/15-19).
[111] Y. Nakaya, S. Oishi, T. Nishi, M. Claus: Numerical Verification of Five Solutions in Two-transistor Circuits, 2006 International Symposium on Nonlinear Theory and its Applications (NOLTA2006), Bologna, Italy (2006/9/11-14).
[112] S. Oishi, K. Tanabe, T. Ogita, S. M. Rump: Convergence Theorem of Rump's Method for Inverting Arbitrarily Ill-Conditioned Matrices, 2006 International Symposium on Nonlinear Theory and its Applications (NOLTA2006), Bologna, Italy (2006/9/11-14).
[113] T. Ogita, S. Oishi: Fast Verification for Sparse Linear Systems with Generalized Diagonally Dominant Matrices, 2006 International Symposium on Nonlinear Theory and its Applications (NOLTA2006), Bologna, Italy (2006/9/11-14).
[114] K. Ozaki, T. Ogita, S. Oishi: Adaptive Verification Method for Dense Linear Systems, 2006 International Symposium on Nonlinear Theory and its Applications (NOLTA2006), Bologna, Italy (2006/9/11-14).
[115] Y. Kanzawa, S. Oishi: A Method of Proving Existence of Solution Curve for Nonlinear Equation using Affine Arithmetic, 2006 International Symposium on Nonlinear Theory and its Applications (NOLTA2006), Bologna, Italy (2006/9/11-14).
[116] 荻田 武史，大石 進一: 数値計算ツールで手軽に大規模線形問題を解く，第 12 回マイクロ波シミュレータワークショップおよび第 3 回講習会，神奈川大学 横浜キャンパス (2006/9/1).
[117] T. Ogita: Fast and Accurate Floating-Point Summation, Workshop on Numerical Analysis and Verification, Waseda University, Tokyo (2006/7/26).
[118] 尾崎 克久，荻田 武史，S. M. Rump，大石 進一: 点と平面との位置関係を判定する高速かつ適応的な手法について，第 35 回 数値解析シンポジウム (NAS2006)，パナヒルズ大阪，大阪 (2006/6/13-15).

[119] 宮島 信也，荻田 武史，大石 進一: 実対称行列の各固有対の精度保証，第 35 回 数値解析シンポジウム (NAS2006)，パナヒルズ大阪，大阪 (2006/6/13-15).
[120] 荻田 武史(JST／早大): 高速・高精度な内積計算法，21 世紀 COE プログラム「プロダクティブ ICT アカデミアプログラム」春季シンポジウム，早稲田大学理工学部 (2006/3/30)
[121] 宮島 信也(早大)，荻田 武史(JST／早大)，大石 進一(早大／JST): 実対称行列の各固有対の精度保証付き計算法，平成 18 年日本応用数理学会研究部会・連合発表会，早稲田大学 理工学部 (2006/3/4-5)
[122] 尾崎 克久(早大)，荻田 武史(JST／早大)，S. M. Rump(ハンブルク工科大学)，大石 進一(早大／JST): 入力誤差を含む点と平面の位置関係を判定する高速なアルゴリズム，平成 18 年日本応用数理学会研究部会・連合発表会，早稲田大学 理工学部 (2006/3/4-5)
[123] 荻田 武史(JST／早大): Fast, Accurate and Verified Numerical Computations，計算機科学と偏微分方程式の交流，北海道大学理学部 (2005/2/5-7)
[124] 尾崎 克久(早大)，荻田 武史(JST／早大)，大石 進一(早大／JST): 高精度内積計算の計算幾何学への応用，第 3 回計算数学研究会，兵庫県立淡路夢舞台国際会議場 (2006/1/5-7)
[125] 荻田 武史(JST／早大)，S. M. Rump(ハンブルク工科大学)，大石 進一(早大／JST): 高速かつ高精度な内積計算法，第 3 回計算数学研究会，兵庫県立淡路夢舞台国際会議場 (2006/1/5-7)
[126] T. Ogita (JST/Waseda Univ.), S. Oishi (Waseda Univ./JST): Fast, Accurate and Verified Numerical Computations, The 2nd International Conference on Scientific Computing and Partial Differential Equations & The First East Asia SIAM Symposium, Lam Woo Conference Center, Hong Kong Baptist University, Hong Kong (2005/12/12-16)
[127] 荻田武史(JST／早大)，S. M. Rump(ハンブルク工科大学)，大石進一(早大／JST): 浮動小数点演算による高速高精度なベクトルの総和及び内積計算法，研究集会「計算科学の基盤技術とその発展」，京大数理解析研究所 (2005/11/30-12/2)
[128] S. Miyajima (Waseda Univ.), T. Ogita (JST/Waseda Univ.), S. Oishi (Waseda Univ./JST): A Method of Generating Linear Systems with an Arbitrarily Ill-conditioned Matrix and an Arbitrary Solution, 2005 International Symposium on Nonlinear Theory and its Applications (NOLTA2005), Bruges, Belgium (2005/10/18-21)
[129] T. Ohta (Waseda Univ.), T. Ogita (JST/Waseda Univ.), S. M. Rump (Hamburg Univ. Tech.), S. Oishi (Waseda Univ./JST): Numerical Verification Method for Dense Linear Systems with Arbitrarily Ill-conditioned Matrices, 2005 International Symposium on Nonlinear Theory and its Applications (NOLTA2005), Bruges, Belgium (2005/10/18-21)
[130] K. Ozaki (Waseda Univ.), T. Ogita (JST/Waseda Univ.), S. Miyajima (Waseda Univ.), S. Oishi (Waseda Univ./JST), S. M. Rump (Hamburg Univ. Tech.): Componentwise Verified Solutions of Linear Systems Suited for Java, 2005 International Symposium on Nonlinear Theory and its Applications (NOLTA2005), Bruges, Belgium (2005/10/18-21)
[131] T. Ogita (JST/Waseda Univ.): Fast and Accurate Computation of Sum and Dot Product, Algebraic and Numerical Algorithms and Computer-assisted Proofs, Dagstuhl Seminar, Dagstuhl, Germany (2005/9/25-30)
[132] 宮島 信也(早大)，荻田 武史(JST／早大)，大石 進一(早大／JST): 条件数と解が設定可能な連立一次方程式のテスト問題の作成法，日本応用数理学会 2005 年度年会「計算の品質研究部会」オーガナイズドセッション，東北大学，仙台，(2005/9/23-25)
[133] S. Miyajima (Waseda Univ.), T. Ogita (JST/Waseda Univ.), S. Oishi (Waseda Univ./JST): Fast Verification for Respective Eigenvalues of Symmetric Matrix, The 8th International Workshop on Computer Algebra in Scientific Computing (CASC'2005), Kalamata, Greece (2005/9/12-16)
[134] 宮島 信也(早大)，荻田 武史(JST／早大)，大石 進一(早大／JST): 実対称行列のそれぞれの固有値に対する精度保証法，第 34 回 数値解析シンポジウム (NAS2005)，浜名

湖カリアック，浜松 (2005/6/28-30)，発表論文集 pp.229-232
[135] 太田 貴久(早大)，荻田 武史(JST／早大)，Siegfried M. Rump(ハンブルク工科大学)，大石 進一(早大／JST)：条件数が非常に大きい連立一次方程式に対する解の精度保証法，第 24 回 日本シミュレーション学会大会，防衛大学校理工学 3 号館，横須賀市 (2005/7/14-15)，発表論文集 pp.225-232
[136] 尾崎 克久(早大)，荻田 武史(JST／早大)，大石 進一(早大／JST)：ポータブルかつ高精度な初等関数の精度保証付き数値計算とその応用，第 24 回 日本シミュレーション学会大会，防衛大学校理工学 3 号館，横須賀市 (2005/7/14-15)，発表論文集 pp.193-196
[137] 宮島 信也(早大)，荻田 武史(JST／早大)，大石 進一(早大／JST)：実対称行列の各固有値の精度保証，第 24 回 日本シミュレーション学会大会，防衛大学校理工学 3 号館，横須賀市 (2005/7/14-15)
[138] 宮島信也，荻田武史，大石進一(早大)：実対称行列の固有値に対する成分毎精度保証付き数値計算法，平成 17 年春の応用数理学会研究部会・同準備会連合発表会，京都大学 芝蘭会館 (2005/3/3-5)
[139] 太田貴久，荻田武史(早大)，Siegfried M. Rump(TUHH)，大石進一(早大)：条件数の非常に大きい連立一次方程式の精度保証付き数値計算法，平成 17 年春の応用数理学会研究部会・同準備会連合発表会，京都大学 芝蘭会館 (2005/3/3-5)
[140] S. Miyajima, T. Ogita, K. Ozaki, S. Oishi (Waseda Univ.): Fast Error Estimation for Eigenvalues of Symmetric Matrix without Directed Rounding, 2004 International Symposium on Nonlinear Theory and its Applications (NOLTA 2004), Fukuoka, Japan (2004/11/29-12/3)
[141] 荻田 武史，尾崎 克久(早大)，S. M. Rump(TUHH)，大石 進一(早大)：有向丸めを用いない連立一次方程式の数値解の高速精度保証法，研究集会 [21 世紀における数値解析の新展開]，京大数理解析研究所 (2004/11/29-12/1)
[142] T. Ogita (Waseda Univ.), S.M. Rump (TUHH), S. Oishi (Waseda Univ.): Verified Solutions of Linear Systems without Directed Rounding, 11th GAMM - IMACS International Symposium on Scientific Computing, Computer Arithmetic, and Validated Numerics (SCAN 2004), Fukuoka, Japan (2004/10/4-8)
[143] T. Ogita (Waseda Univ.), S.M. Rump (TUHH), S. Oishi (Waseda Univ.): Accurate Sum and Dot Product, 11th GAMM - IMACS International Symposium on Scientific Computing, Computer Arithmetic, and Validated Numerics (SCAN 2004), Fukuoka, Japan (2004/10/4-8)
[144] 荻田 武史(早大)，S. M. Rump(TUHH)，大石 進一(早大)：FMA を用いた高精度内積演算，日本応用数理学会 2004 年度年会，中央大学 (2004/9/16-18)
[145] 大石 進一，荻田 武史，太田 貴久(早大)，S. M. Rump(TUHH)：悪条件連立一次方程式の数値解の導出とその精度保証，日本応用数理学会 2004 年度年会，中央大学 (2004/9/16-18)
[146] 尾崎 克久，荻田 武史，宮島 信也，大石 進一(早大)，S. M. Rump(TUHH)：Java による連立一次方程式のための精度保証法，日本応用数理学会 2004 年度年会，中央大学 (2004/9/16-18)
[147] T. Ogita (Waseda Univ.), S.M. Rump (TUHH), S. Oishi (Waseda Univ.): (Invited Session) Accurate Sum and Dot Product with Applications, 2004 IEEE International Symposium on Computer Aided Control Systems Design (2004 CACSD), Taipei, Taiwan (2004/9/2-4)
[148] 太田 貴久，大石 進一，荻田 武史(早大)，S.M. Rump(TUHH)：高精度内積計算アルゴリズムを用いた連立一次方程式の精度保証付き数値計算法，第 23 回 日本シミュレーション学会大会，早稲田大学理工学部 (2004/6/16-17)
[149] 荻田 武史，大石 進一(早大)：直接解法を用いた疎行列の正則性の検証法，第23回 日本シミュレーション学会大会，早稲田大学理工学部 (2004/6/16-17)
[150] 荻田 武史，大石 進一(早大)：疎行列のための精度保証法，第 33 回 数値解析シンポジ

ウム(NAS 2004), 熱海 (2004/5/19-21)

③ ポスター発表 (国内会議 9件、国際会議 0件)

[1] 尾崎 克久, 荻田 武史, 大石 進一:計算幾何学の判定問題に対する精度保証付き数値計算, 第2回63号館ハイテクリサーチセンターシンポジウム『材料・デバイス・システム連携と次世代通信社会』, 早稲田大学大久保キャンパス(2009/1/17)
[2] 山中脩也, 岡山友昭, 大石進一, 荻田武史:DE 公式を用いた高精度精度保証付き自動積分法の改良, 第2回63号館ハイテクリサーチセンターシンポジウム『材料・デバイス・システム連携と次世代通信社会』, 早稲田大学大久保キャンパス(2009/1/17)
[3] 高安亮紀, 大石進一, 久保隆徹:2階常微分方程式の精度保証, 第2回63号館ハイテクリサーチセンターシンポジウム『材料・デバイス・システム連携と次世代通信社会』, 早稲田大学大久保キャンパス(2009/1/17)
[4] 大石 進一: 音波の散乱問題の精度保証付き数値計算, 第2回 「シミュレーション技術の革新と実用化基盤の構築」領域シンポジウム, JAビル 8階 国際会議室(2007/1/22-23).
[5] 荻田 武史, 大石 進一: 高精度内積計算と精度保証付き数値計算への応用, 第2回 「シミュレーション技術の革新と実用化基盤の構築」領域シンポジウム, JAビル 8階 国際会議室(2007/1/22-23).
[6] 尾崎 克久, 荻田 武史, 大石 進一: Geometric Predicate の高速かつ高信頼な計算, 第2回 「シミュレーション技術の革新と実用化基盤の構築」領域シンポジウム, JAビル 8階 国際会議室(2007/1/22-23).
[7] 山中 脩也, 荻田 武史, 大石 進一: 高精度内積演算の並列化, 第35回 数値解析シンポジウム (NAS2006), パナヒルズ大阪, 大阪 (2006/6/13-15).
[8] 太田 貴久(早大), 荻田 武史(JST/早大), 大石 進一(早大/JST), Siegfried M. Rump (ハンブルク工科大学): 悪条件連立一次方程式の精度保証付き数値計算法, 計算機援用証明チュートリアル 2005, 九州大学 (2005/3/4-8)
[9] 尾崎 克久(早大), 荻田 武史(JST/早大), 大石 進一(早大/JST): 倍精度演算による初等関数の精度保証とその応用, 計算機援用証明チュートリアル 2005, 九州大学 (2005/3/4-8)

(4)知財出願

①国内出願 (0件)

②国外出願 (0件)

③その他の知的財産権

なし

(5)受賞・報道等

①受賞

[1] 大石 進一「船井情報科学振興賞」線形系の精度保証付き数値計算学の確立と実用化に関する貢献, 2006年.
[2] 太田 貴久, 荻田 武史, S. M. Rump, 大石 進一 「日本応用数理学会論文賞」, 2006年.
[3] 大石 進一, 電気通信普及財団賞(テレコムシステム賞) 著作「精度保証付き数値計算」(コロナ社, 2000年)に対して, 2007年.

②その他

[1] 日経BPムック「変革する大学」シリーズ 早稲田大学理工学部 2006-2007年度版, pp. 64-67(大石), p.89(荻田)で大石チームの精度保証付き数値計算の研究について日経BP企画によるインタビュー内容が紹介された。

(6)成果展開事例

①実用化に向けての展開

- 数値計算の精度保証化が実用化され始めている。本研究者の共同研究者である S. M. Rump 教授の開発した MATLAB のツールボックス INTLAB には本研究の成果が随所に使われており、その引用論文は 250 にのぼっている。これは精度保証付き数値計算の 80 パーセント近くが INTLAB によって計算されていることを示している。ダウンロード数は 4000 以上、世界 40 カ国以上で利用されている。(引用文献については
http://www.ti3.tu-harburg.de/rump/intlab/INTLABref.pdf
参照)
- C-XSC と呼ばれる、C++の精度保証付き数値計算のためのツールボックスの高速精度保証ルーチンの中で利用されている。C-XSC は精度保証付き数値計算ソフトウェアとしては一番古くから開発されているものの一つで、その高速化が本件研究の方式により実用化されている。(これについては
http://www.math.uni-wuppertal.de/~xsc/xsc/cxsc/software/fastpilss/dagstuhl.pdf
参照)
- 得られた高精度内積計算に関する成果は、現在策定中の区間演算の国際標準規格 IEEE P1788 の実現に貢献している。(IEEE Interval Standard Working Group - P1788 については
http://grouper.ieee.org/groups/1788/
参照)

②社会還元的な展開活動

- スーパーコンピュータの高信頼性計算: これについては、スーパーコンピュータの研究者から次世代スーパーコンピュータの高信頼度化のコア技術として、本研究者の精度保証技術を利用しようという共同研究の申し出があり、検討を開始している。

§6 研究期間中の主な活動(ワークショップ・シンポジウム等)

年月日	名称	場所	参加人数	概要
2009/7/31	精度保証付き数値計算講演会(V)	新宿ラムダックスビル	約 20 名	ハンブルク工科大学 S. M. Rump 教授による講演会
2009/6/1	精度保証付き数値計算講演会(IV)	新宿ラムダックスビル	約 20 名	ハンブルク工科大学 S. M. Rump 教授による講演会
2008/12/26	精度保証付き数値計算講演会(III)	ロバート・J・シルマンホール	約 20 名	ハンブルク工科大学 S. M. Rump 教授による講演会
2008/10/17	精度保証付き数値計算講演会(II)	新宿ラムダックスビル	約 20 名	ハンブルク工科大学 S. M. Rump 教授及び C. Keil 氏による講演会
2007/10/17	精度保証付き数値計算講演会(I)	ロバート・J・シルマンホール	約 40 名	カールスルーエ大学 M. Plum 教授及びハンブルク工科大学 S. M. Rump 教授による講演会
2007/10/16		早稲田大学西早稲田キャンパス		

§7 結び

今回は、線形数値シミュレーションの精度保証ということで、線形系にテーマを絞る代わりに、線形系については非常に高速に、あるいは、所望する精度まで高効率に精度保証付きでシミュレーションするための基礎技術を構築することに成功したと考えている。大規模線形システムをシミュレーションすることもターゲットの一つであったが、大規模化に伴いシミュレーションの精度が低下するのが精度保証をすることによって目に見えるように判明し、大規模システムのシミュレーションには、途中の計算精度を上げる必要性を明確にすることができた。そして、これを無誤差変換という画期的な新手法で、効率をあまり落とさずに達成できることを示せたのは大きな成果であった。このように、研究開始当時には思いもつかなかったような画期的な成果が随所に得られたのは大きな成果であった。

残されるのは、非線形系の精度保証技術の基盤を構築することである。研究開始当時はこれはずいぶん先になると考えていたが、本プロジェクトを終了間近になった現時点では、この問題に取り組む準備段階がほぼ整ったように感じられるようになった。すなわち、区間演算の高速化について、無誤差変換の手法の応用や発展により新しい研究の方向性が見えてきた。今後は、これを推進するために全力を傾注したいと考えている。

研究代表者としてチーム全体の研究推進に心がけたことは、新しいアイディアの出会いの場をできるだけ広くかつ深い意味でもつことであった。そのために、海外との研究者との交流、若手の育成に力を注いだ。

海外の研究者との交流は、ドイツのハンブルグ工科大学 S. M. Rump 教授との交流を中心に、非常に活発にできた。Rump 教授は年間4ヶ月程度早稲田大学に滞在し、多くの共同研究を行い、無誤差変換の研究など非常に多くの果実を得ることができた。また、INVA やダグスツールセミナーなど国際ワークショップの主催を含め、世界の主立った精度保証付き数値計算関係の研究者と多くの交流をもつことができた。これによって、非常に多くの異文化的なアイディアが本プロジェクト研究に融合されて、革新的な研究成果を得ることができた。また、若手研究者を客員講師等に雇用して育成することにより、若手からの新しいアイディアも育てることができた。実際、無誤差変換への最初の着眼は、若手研究者として育成した荻田氏によるものである。若手研究者に国際会議で発表する場を与えると、目に見えて成長すること、また、海外の研究者との共同研究の場を与えると、文化的な複合化が起き、非常に力強い研究の能力が育成されることを目の当たりにできたことは大変幸運であった。これはかなり意識的に行った点で、実際、研究費の配分も若手研究者の雇用経費と海外研究者との交流のための旅費等に主に使用した。

プロジェクトの最終年度を迎えるにあたり、戦略的創造研究推進事業は、非常に優れた研究統括やアドバイザリーメンバーの非常に高い視点からの目標設定と行き届いた、そして優れた目配りのアドバイスのもとに、世界的な視野における研究推進が行える非常に優れた事業と感じている。社会の要請に応え、世界的な交流の中で研究ができる本事業のような枠組みが、真のイノベーションを達成するために非常に重要であると実感した次第である。

また、本プロジェクトを推進するにあたり、事務サポートチームから受けた非常に柔軟で適切かつ暖かいサポートは研究を推進する上で大きな力になった。

＜研究室の雰囲気や計算機環境＞