

コハツ・ヒガ アルトゥーロ

立命館大学大学院理工学研究科・教授

複雑な金融商品の数学的構造と無限次元解析

## §1. 研究実施体制

### (1)「シミュレーション」グループ

① 研究代表者:コハツ・ヒガ アルトゥーロ (立命館大学大学院理工学研究科、教授)

#### ② 研究項目

・ジャンプ型 SDE の近似

理論的な側面からみたランダムな刻みに関する作用素分解法

a)モーメントが存在する場合

b)モーメントが存在しない場合(安定過程)

・Malliavin 解析

a)確率微分方程式の最大値

b)Greeks の計算

c)ジャンプ型確率微分方程式の Greeks の新しい計算手法の開発

・BSDE の解の新しい計算手法の開発

### (2)「データ解析」グループ

① 主たる共同研究者:内田 雅之 (大阪大学大学院基礎工学研究科、教授)

#### ② 研究項目

・misspecified diffusion model の推測

・マイクロストラクチャーノイズの下でのボラティリティの推定

・確率ボラティリティモデルの推定

・Gerber-Shiu 関数のノンパラメトリック推定

・ジャンプ過程のノンパラメトリック推定

## § 2. 研究実施内容

(文中に番号がある場合は(3-1)に対応する)

### 【研究背景】

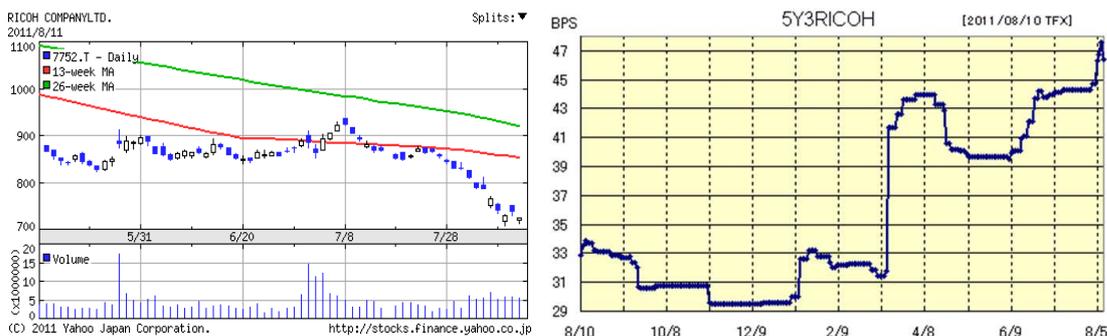
豊富な表現力をもつ確率微分方程式を用いて、金融市場のマイクロストラクチャーをとらえる数理モデルを構築することは、金融実務界の標準的アプローチとなっている。また高頻度データが比較的容易に入手可能となった現在では、確率微分方程式モデルの統計解析が、株価や債券等のマイクロストラクチャーの分析のための科学的手法として注目されている。一方で仕組商品など多くの要素が複雑に絡み合った問題では、モデルが本質的に高次元・無限次元となり、それを実務的に実装可能なレベルまで近似・単純化する理論的な枠組みは未だ整備されていない。これは、Footnote 現実と異なったモデルを採用したことに起因する、モデルリスクと呼ばれるリスク要因がきちんと解析されていないと言い換えてもよい。上述のように不適切なモデルの単純化が重大な危機を招いたとの反省から、モデルに対するより深い洞察と、正当性が理論的に保証された近似モデル、モデル評価のための客観的な指標、及び数値シミュレーション法、統計的推定法を含む実装可能なスキームが金融実務界から切実に求められている。

本研究課題設定に関する簡単な紹介：

複雑金融商品の基本性質を理解するために次の信用リスク商品：CDS(credit default swap)を紹介する。この商品の価格がその会社の倒産可能性が表現する商品である。

信用リスク商品に関しての研究から、いくつかの数学的な性質が明確に解明できた。その説明を行うために実際のデータにあてはめ検証を行っている。例えば以下のデータはRICOHの株価データである。その右の図はCDSのデータである。

【データ:Yahoo Japan】



$\{X_{t_k}; k = 0, \dots, N\}$  がデータとして存在すると仮定し、そのデータのモデルが

$$dX_s^i = b_i(X_s, \theta_1)ds + \sigma_{i,j}(X_s, \theta_2)dW_s^j + \bar{\sigma}_{i,j}(X_s, \theta_3)dZ_s^j$$
 とする。これから  $\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$  を推定すること

にしている。統計的な議論を行うために、高頻度データがあるという仮定の下で理論的な研究を進めている。また、マイクロストラクチャーノイズ(金融市場のマイクロ構造に起因するノイズ)の影響、ジャンプの存在、adaptive estimation などについて研究を行い、これまでの研究成果である理論を実際の市場データ(本年度4月購入済み)に適用し、その精度を測る予定である。

上のデータを比べると株価とCDS価格の関係が分かる。7月後半の株価の下落に伴い、CDS価格は上昇している。これは企業の倒産確率が高くなっていることが反映したものと考えられる。ただし、必ずしもはっきりした関係が見えない場合もある。例えば、5月は株価の変動は少ないがCDS価格は5月に下落している。このことから分かる様に、CDSを元にした金融商品は最も解析困難な上、ジャンプの存在が認められる金融商品の一つと言える。このため、本年度はジャンプ型確率微分方程式やその最大値の解析のための、数学的な道具の準備を行った。Levy過程を基礎とした確率微分方程式の新シミュレーション方法を開発し、その方法と他の方法との比較を行った。また、古典的なMalliavin解析を使い確率過程の最大値に対して解析し、密度関数や簡単な金融派生商品のリスク評価を行った。

#### 【A:「シミュレーション」グループ】

平成21年度に、複雑な金融商品の議論を行った結果、数学的な性質に関する今後の研究の進め方として、以下の主な方針をたてた。

1. 高次元ジャンプ型確率微分方程式を扱う。
2. 1. のシミュレーション方法に関する研究を行う。
3. データの解析を行うために、統計学的な新しい技術の開発を行う。

まず、1. の高次元ジャンプ型確率微分方程式についての研究について説明する。

$dX_s^i = b_i(X_s, \theta_1)ds + \sigma_{i,j}(X_s, \theta_2)dW_s^j + \bar{\sigma}_{i,j}(X_s, \theta_3)dZ_s^j$  という確率微分方程式が一つの企業の資産の動きを表すとする。ds で表す係数が短時間での無リスク資産の動きを表す項である。W がブラウン運動(ホワイトノイズ)を表し、連続で確率論的に動いていることを表す項である。最後にZはジャンプ型確率過程であり、確率論的にジャンプを表す項である。金融モデルで通常よく使われるジャンプ項Zは、有限時間内で無限回ジャンプすることがあるので、どの有限区間でも無限次元の要素がある。シミュレーションの観点からみると、ジャンプする時間とジャンプの大きさを考慮する必要があり、非常に複雑な問題である。そのために様々な有限次元の近似を提案し、実際の計算の精度とコストを測り、シミュレーションの評価を行っていく。

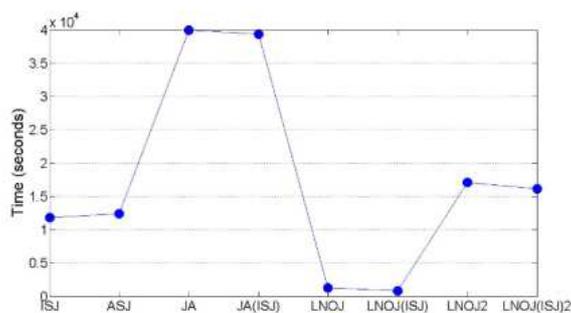
デフォルト時間は様々なモデルの設定の仕方があるが、構造モデルでは次の時間の性質を調べている。  $\tau_i = \inf\{t; X_t^i \leq K_i\}$  ここでは  $K_i$  をデフォルトレベルという。しかし、

$\{\tau_i \geq t\} = \left\{ \min_{s \leq t} X_s^i > K_i \right\} = \left\{ -\max_{s \leq t} -X_s^i < -K_i \right\}$  が分かるので、Xの最大値について性質を調べ

ることを目的に研究を行っている。まず、Z=0の場合(ジャンプの項を持たない場合)について、林氏(CREST P.D.)との共同研究で、密度関数の性質の研究を行った<sup>A-3)</sup>。同時にCDOより簡単な金融派生商品に対して、この研究で用いた手法を使い、できるだけ広い範囲におけるリスク評価を現在行っている。特に中津氏(博士後期課程)との共同研究で、リスク管理のためにVega指数と呼ばれる量に関して研究を行っている。その結果から当初考えていたとおり、モデルによってリスクの評

価に大きな違いがでることが分かった。例えば、**European** タイプの商品に対して具体的な例でシミュレーションすると、商品価格が大きく変わることが分かった。ところで、現在までの最大値の解析の手法は技巧的な部分もあり、この研究で用いた手法には制限が必要であることが分かった。そのため、今後、無限次元解析のための新しい解析の手法を準備する予定である。主に有限次元の近似確率過程から構成し、極限を取ることでよりフレキシブルな理論を作れるのではないかと予想している<sup>A-1)</sup>。

ジャンプ型確率過程の具体的なシミュレーションについて:ジャンプを持たない場合 ( $Z=0$  の場合) については高度シミュレーション法が知られている(例えば楠岡スキームなど)。しかし、このシミュレーション法を最大値に適用するための密度関数の近似が必要である。また、ジャンプ型確率微分方程式に関するシミュレーションの方法も調べていく必要がある。金融商品でよく扱われるジャンプ型過程として、上に述べた高次元ジャンプ型確率微分方程式があるが、この確率過程は有限時間内で、無限回のジャンプをするためシミュレーションを行うのは難しい。しかし、(Long, CREST PD) 本研究を行ってからの2年間で、この場合における2つのシミュレーション方法を提案した<sup>A-2)</sup>。現在、その数学的な性質を調べ、実際のシミュレーションに従って比較を行っている。最終的に信用リスクの複雑な商品に適用することを予定している。現在は、標準的な例でシミュレーションを行っている。右記の図は、一定の精度の下での計算速度を、従来から知られている方法 (ISJ から JA (ISJ) <sup>[1)]</sup>) と本研究で提案した方法 (LNOJ) とで比較したものである。



【図3. シミュレーション方法の精度】

米国留学: 野村証券の研究者と共に金融の応用的な研究を進めている。特に最大値に対する複製リスクの分布について研究を進めている。さらにアメリカの市場状況や信用リスクに対してのデータや環境について調査を行うために **JST** 戦略的研究推進事業 国際強化支援策の予算を新たに申請、受理され土屋氏をNYに派遣し、5ヶ月間 **P. Carr** 氏 (New York, Courant Institute) と共同研究を行い、現在も引き続き行っている。この共同研究では、NY 市場の環境について詳しく調べ、CREST の研究の方向に大きな影響を与えることを期待する。

#### 【B:「データ解析」グループ】

確率微分方程式に従う高頻度データに基づいて、未知パラメータの統計的推定や統計的検定、そして統計的モデル評価・選択問題についての研究を行った。論文<sup>B-1)</sup>では、拡散過程モデルが真のモデルを含むとは限らない場合について、高頻度データを用いてドリフト・ボラティリティの同時最尤型推定量を構成し、その漸近的性質について考察した。その結果を下に、misspecification を判別する検定統計量を構成し、その漸近分布を導出した。また、高頻度データを利用したボラティリティの推定では、離散観測、市場のルールによる価格の離散化、などの市場のマイクロ構造に起因す

るマイクロストラクチャーノイズの影響を考慮する必要がある。論文 B-2)では、実現分散の推定量にバイアスを生じさせているマイクロストラクチャーノイズの自己共分散構造を特定化し、推定する方法を提案するとともに、その自己共分散の推定量をバイアス補正に利用している。さらに数値実験により、他の先行研究で提案されている方法と同等以上の精度を与えることを示している。論文 B-3)では、株式指数に加えてオプションの価格から計算したボラティリティ指数の日中高頻度データを用いて、株価の連続時間確率ボラティリティ・モデルの母数(特にレバレッジ)推定を行う方法を提案し、従来の手法と比べ精度が向上していることをシミュレーションにより確認した。また S&P500 と VIX データによる Heston モデル推定への適用結果を示した。論文 B-4)では、オプション市場価格データが持つ、将来のボラティリティについての情報を指数として、モデルに依存しない形で計算する新しい方法を与えた。既存の方法に含まれる数値積分誤差や補間・補外による近似誤差がこの新しい方法で改善されることを示した。この方法の背後にあるインプライドボラティリティとオプション価格の関係を、論文 B-13)において、より一般に考察した。論文 B-6)では、保険クレームが複合ポアソンの、かつ微小なブラウン摂動がある場合に、保険サープラスのリスク関数として近年注目されている Gerber-Shiu 関数のノンパラメトリック推定について議論し、ある種の一致推定量を得た。論文 B-7)では、一般のレヴィ過程に基づく保険サープラスの下で、自然なデータ設定(観測スキーム)を仮定して、一致推定量を構成した。論文 B-8)ではファイナンスで重要となる拡散過程モデルの特殊ケースとして、非エルゴード的 Ornstein-Uhlenbeck 過程の推定理論について述べた。金利等の効果を考えた経済モデルはこのようなプロセスに従うことがあり、データ解析における一つのツールとして重要である。論文 B-9)は論文 B-8)の一般化である。論文 B-10)では、保険ポートフォリオの破産時刻を、ファイナンスにおけるある種のデフォルト(倒産)の概念を含むように拡張し、そのデフォルトに関するリスク関数に対していくつかの解析的表現を導出したものである。論文 B-11)では、確率積分をリーマン和によって近似した際の誤差を考察し、時間分割を細かくしていく極限における近似誤差の漸近分布が、時間分割に伴う局所的な被積分過程増分の歪度・尖度によって完全に決定されることを示した。歪度と尖度に関する新しい不等式を導き、近似誤差を最小にする時間分割の方法を陽に与えた。この結果は金融デリバティブの最適な離散ヘッジ戦略を与える。論文 B-12)において同じ問題を平均二乗誤差の観点から考察し、その漸近下界を与え、それが論文 B-11)で与えた最適な時間分割の方法によって達成されることを示した。また数値実験によってこの最適な方法が実際に一般的な方法を優越することを確認した。論文 B-14)では、ドリフトとジャンプで変動する確率過程に関するノンパラメトリック推定問題に取り組んだ。このような確率過程における局所時間の確率積分表現を導出し、この結果を元に定常密度および強度関数に対する一致推定量を構成することに成功した。

### §3. 成果発表等

#### (3-1) 原著論文発表

##### ●論文詳細情報

- A-1. Kohatsu-Higa, A. and Nakatsu, T. “Calculation of vega for Lookback type options”, in preparation
- A-2. Kohatsu-Higa, A. and Ngo, L. “Weak approximations for SDE’s driven by Levy processes.” To appear in the proceedings of the Ascona conference, 2012
- A-3. M. Hayashi and A. Kohatsu-Higa, “Smoothness of the distribution of the supremum of a multi-dimensional diffusion process.”, *Potential Analysis*, in press (DOI:10.1007/s11118-011-9263-8)
- A-4. Kohatsu-Higa and M. Yamazato. “Insider modelling and logarithmic utility for models with jumps.” *Applied Mathematics and Optimization*, 64, 217-255, 2011.
- A-5. Kohatsu-Higa and A. Tanaka. “A Malliavin Calculus method to study densities of additive functionals of SDE's with irregular drifts.” To appear in *Annales de l'Institut Henri Poincare*, 2012.
- A-6. Hoang-Long Ngo, “An estimation of integrated cross volatility for high-frequency asynchronous data”, *Journal of Non-parametric Statistics*, article in press, 2012 (DOI:10.1080/10485252.2011.647696)
- A-7. Hoang-Long Ngo and Shigeyoshi Ogawa, “On the discrete approximation of occupation time of diffusion processes.”, *Electronic journal of statistics.*, Volume 5, pages 1374—1393, 2011, (DOI: 10.1214/11-EJS645)
- B-1. Uchida, M. and Yoshida, N. “Estimation for misspecified ergodic diffusion processes from discrete observations”, *European Series in Applied and Industrial Mathematics: Probability and Statistics*, vol. 15, pp. 270-290, 2011. (DOI: 10.1051/ps/2010001)
- B-2. Kosuke Oya, “Bias Corrected Realized Variance under Dependent Microstructure Noise”, *Mathematics and Computers in Simulation*, vol. 81, issue 7, pp.1290-1298, 2011 (DOI: 10.1016/j.matcom.2010.04.017)
- B-3. Isao Ishida, Michael McAleer and Kosuke Oya, “Estimating the Leverage Parameter of Continuous-time Stochastic Volatility Models Using High Frequency S&P 500 and VIX”, *Managerial Finance*, vol. 37, issue 11, pp.1048-1067, 2011 (DOI: 10.1108/03074351111167938)
- B-4. Masaaki Fukasawa, Isao Ishida, Nabil Maghrebi, Kosuke Oya, Masato Ubukata and Kazutoshi Yamazaki, “Model-Free Implied Volatility: From Surface to Index”, *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, vol.14, issue 4,

- pp.433-463, 2011 (DOI: 10.1142/S0219024911006681)
- B-5. 清水 泰隆, “危険理論における Gerber-Shiu 関数と統計的推測”, 統計数理, Vol. 59, No.1, pp.105-124, (Journal’s web site: <http://www.ism.ac.jp/editsec/toukei/pdf/59-1-105.pdf>), 2011.
- B-6. Yasutaka Shimizu, “Nonparametric estimation of the Gerber-Shiu function for the Wiener-Poisson risk model”, Scandinavian Actuarial Journal (in press), (DOI: 10.1080/03461238.2010.523515), 2011.
- B-7. Yasutaka Shimizu, “Estimation of the expected discounted penalty function for Lévy insurance risks”, Mathematical Methods of Statistics, Vol. 20, No. 2, pp.125-149.(DOI: 10.3103/S1066530711020037), 2011.
- B-8. Yasutaka Shimizu, “Local asymptotic mixed normality for discretely observed non-recurrent Ornstein-Uhlenbeck processes”, Annals of the Institute of Statistical Mathematics (in press), (DOI: 10.1007/s10463-010-0307-4).
- B-9. Yasutaka Shimizu, “Estimation of parameters for discretely observed diffusion processes with a variety of rates for information”, to appear in Annals of the Institute of Statistical Mathematics (in press), (DOI: 10.1007/s10463-010-0323-4).
- B-10. Runhuan Feng and Yasutaka Shimizu, “On a generalization from ruin to default in a Lévy insurance risk model (accepted), Methodology and Computing in Applied Probability”, 2011 (DOI: 10.1007/s11009-012-9282-y).
- B-11. Masaaki Fukasawa, “Discretization error of stochastic integrals”, Annals of Applied Probability 21 (2011) 1436-1465.
- B-12. Masaaki Fukasawa, “Asymptotically efficient discrete hedging”, Stochastic Analysis with Financial Applications, Progress in Probability 65 (2011) 331-346.
- B-13. Masaaki Fukasawa, “The normalizing transformation of the implied volatility smile”, Mathematical Finance (in press)
- B-14. Takayuki Fujii and Yoichi Nishiyama, “Some problems in nonparametric inference for the stress release process related to the local time”, to appear in Annals of the Institute of Statistical Mathematics. (DOI: 10.1007/s10463-011-0344-7)