

「マルチスケール・マルチフィジックス現象の統合シミュレーション」
平成 18 年度採択研究代表者

町田 昌彦

(独) 日本原子力研究開発機構・システム計算科学センター
シミュレーション技術開発室室長 研究主幹

超伝導新奇応用のためのマルチスケール・マルチフィジックス シミュレーションの基盤構築

1. 研究実施の概要

超伝導とは、20 世紀初めに発見された、人類がこれまでに目にしてきた最も劇的な量子現象の一つである。その産業応用への高い潜在的可能性は誰もが認めるところであるが、超伝導研究開発分野では現在、その基礎から応用まで解決すべき困難な課題を抱えており、その積極的産業利用は未だ十分ではない。本研究実施者らは、それらの困難な課題を解決し、未来の超伝導社会を切り拓くため、シミュレーションをツールとして、マイクロ・メゾ・マクロの異なる 3 つのスケールで代表的課題を見定め（あるいは必要に応じそれらを統合し）、地球シミュレータクラスの超並列計算機を利用して課題解決の糸口を探ることとした。尚、本研究課題は平成 18 年度 10 月より各スケールでの研究に実績を有する 5 大学・2 研究機関の体制にて研究を開始し、平成 19 年度はそれらを整理統合し、4 大学・2 研究機関とした。19 年度の成果としては、まず、マイクロレベルにおいて、密度行列繰り込み群（DMRG）と呼ばれる高精度な量子状態計算手法の 2 次元化を進め、高温超伝導機構研究に広く用いられているハバード・モデルの高精度計算を実現した。尚、そこで用いる行列対角化数値計算技術に関しては計算工学会論文賞を受賞し、今後は京速計算機利用も目標として更なる大規模並列化（高速化を含む）を進めていく。また、其の手法を利用し、原子ガスや高温で実現する超伝導についての理解をマイクロレベルを進める。メゾレベルについては、高温超伝導体が固有に持つジョセフソン接合の電磁波発振特性や低温での量子トンネル効果についてのシミュレーション研究を進め、実験結果の説明のみならず、新たな現象の予測を行った。今後はデバイス開発を先導することを目標とし、研究開発を進める。最後にマクロレベルについては、時間依存ギンツブルク・ランダウ方程式のシミュレーションコードの高度化を進め、磁束ピン止めダイナミクスのマルチスケール・シミュレーション

ョン手法開発へ向けてモデリングを行った。次年度以降は開発コードの検証を兼ねて、未解決の基礎物性（ホール効果、磁束格子ダイナミクス等）解明に役立てる他、複雑形状のピン止めに対するピンニング・ダイナミクスのシミュレーションを行う。

2. 研究実施内容

（文中にある参照番号は 4. (1)に対応する）

超伝導とは、20 世紀初めに発見された、人類がこれまでに目にしてきた最も劇的な量子現象の一つであり、その産業応用への高い潜在的可能性は誰もが認めるところである。しかしながら、其の発見以後、100 年あまりも経過したにもかかわらず、その積極的産業利用は未だ十分に行われていない。これは超伝導機構や其の現象の理解がその理論の難しさ（例えばジョセフソン効果は基本的に非線形現象である）から未だに進んでいないためであり、また、その性質を利用することで得られると考えられる圧倒的利便性が未だ提案されていないためである。本研究実施担当者らはこうした状況を打破すべく、様々な課題をシミュレーションにより解決することを目指して、マイクロ・メゾ・マクロの異なる 3 つのスケールで代表的課題を定め（問題に応じてはそれらの異なるスケールを統合して）、地球シミュレータクラスの超並列計算機を用いて大規模並列シミュレーションすることにより課題解決の糸口を探ることとした。尚、本研究課題は平成 18 年度 10 月より 5 大学・2 研究機関の体制にて始動したが、19 年度は一部改編して 4 大学・2 研究機関とした。

19 年度の具体的研究成果としては、まずマイクロレベルで、原子力機構・町田グループが密度行列繰り込み群(DMRG)と呼ばれる高精度な量子状態の計算手法の 2 次元化を行い、高温超伝導機構研究等に広く用いられているハバード・モデルの超並列シミュレーションを実現させ、原子ガスで実現する超流動[1.7,1.15]や高温で実現する超伝導[1.16,1.25]についての理解へ向けた研究を行った。その結果、計算技術開発[1.6]に関しては同グループの山田進が計算工学会論文賞を受賞した他、4-legs・梯子ハバード・モデルの高精度シミュレーションにより、電子密度がストライプ構造を持つ基底状態が得られることを確かめた[1.8,1.14]。また、同グループの奥村はハバード・モデル（一次元チェーンや梯子モデル）において、ランダムネスと反発力が競合することでホール（電子）が局在することなどを見出した[1.20,1.23]。さらに、超伝導状態と関係が深い超流動状態のボース原子ガス系において、量子場の理論に基づいた定式化を行い[1.2, 1.17]、高次量子渦は必ず崩壊することを解析的に示した[1.4, 1.24]。慶応大・大橋グループは、高温超伝導や更に室温超伝導を理解する上で重要なモデル系である原子ガス・光学格子中のフェルミ原子ガス超流動[4.1-4.3]に対して、超流動揺らぎと電荷、スピン密度揺らぎの競合を研究し、ハーフフィールド近傍において超流動転移が密度揺らぎの影響で抑制されることを見出した。これにより超流動転移の最高温度はハーフフィールドではなく 1/4 フィリング近傍となることが分かった。さらに、産総研・柳澤グループは 2

次元電子系に対するモンテカルロ・シミュレーション法の基本となるアルゴリズムをモンテカルロ対角化法[6.1]に基づいて構築し、小さな系においては厳密な結果を再現することを確かめ[6.4]、また、量子シミュレーションのパスに修正を加えて負符号を回避する方法 (Constrained path Monte Carlo 法) による、シミュレーション・プログラムを開発し、少数系で正しい結果が得られることを確かめた[6.1]。今後はこれらの手法の大規模な数値計算コードを開発し、2次元強相関係[6.3-6.6]の性質に迫る。

次にメゾレベルでの研究において、原子力機構・町田グループは超伝導デバイスなどメゾスケールで顕著となる有限サイズ効果の一つとして、スピン軌道相互作用が及ぼす影響を調べ[1.3,1.19,1.21]、同グループの林伸彦が日本物理学会にて招待講演を行った他、超伝導クーパー対の形成機構と関連した超伝導ギャップ異方性を明らかにする一手段として、実験測定データの新しい解析法を開発した[1.5]。また、こうした基礎物性研究の応用の一環[5.1-5.3,5.5]として、大阪府立大・加藤グループは d 波超伝導体と s 波超伝導体を組み合わせた超伝導複合体 d-dot[5.1,5.4,5.6-5.8]を用いたセルオートマトンの論理回路を提案し、時間依存のギンツブルグ・ランダウ方程式によるシミュレーションを行い、その動作実証に成功している。一方、高い潜在能力を持つ高温超伝導体固有ジョセフソン接合[1.1,1.10-1.13,2.1]に対しては、東北大・小山グループ、産総研・柳澤グループが、超伝導固有ジョセフソン接合のテラHz発振のシミュレーションと巨視的量子トンネル現象(MQT)についての理論・数値計算を行い、特に東北大・小山グループの松本らは、固有ジョセフソン素子と外部環境とを接続し、外部環境へ電磁波を放射する直接シミュレーションコードを開発し、放射条件について実験との比較を行った[3.5]。MQT については 東北大・小山グループの小山は、固有接合の巨視的量子トンネル効果における接合間の結合の効果について理論的に計算を進め[3.1-3.4]、産総研・柳澤グループの川畑は、ノード準粒子散逸の存在が MQT に及ぼす影響について詳細に解析を行った[6.2]。その結果、ノード準粒子散逸の影響は非常に小さく、固有ジョセフソン接合は量子コンピュータとして高いポテンシャルを有することを明らかにした他、YBCO ジョセフソン接合における多次元 MQT の理論を構築し、外部 LC 回路が MQT に著しい影響を与えることも明らかにしている。さらに、秋田大・林グループは、メゾスケールな超伝導ネットワークに注目し、時間に依存するギンツブルグ・ランダウ方程式に基づく数値シミュレーション手法を用いた研究を行い、特に交流電流の存在下で新奇な電気伝導特性の存在を見出した。今後は、さらにダイナミックな外部環境が存在する場合のメゾスケール効果[2.2-2.4,5.9]に対して、広範なシミュレーションを行っていく。

マクロスケールレベルでの超伝導体の電流輸送特性の研究では、原子力機構・町田グループの中井が時間依存のギンツブルグ・ランダウ方程式[1.9]の2次元シミュレーションコード(絶縁体を内部に埋め込んだ場合のシミュレーションを可能とするタイプ)を新たに開発し、磁束ピン止めの種類依存性に注目して、磁束ピン止めダイナミクス of 系統的シミュレーションを行った[1.18,1.22]。19年度は特に絶縁体磁束ピン止めのモデルを構築し、それを用いた磁束ピン止めダイナミクスのシミュレーションを行い、絶縁体特有のピン止めダイナミクスを明らかにし、さらに、金属の磁束ピン止めより、絶縁体の磁束ピン止めの方がピン止め能力が遥かに高いことを実証した。この

結果は、磁束ピン止めの効果を挙げるために必要な条件を考える際の一つの重要な指針となる。今後は、磁束のピン止めについて 3 次元的なピン止め力の大きいピン止めサイト(分布も含めて)構造についての研究を進める一方、ピンニング・ダイナミクスに関係する基礎的課題の解決にも挑戦する。

3. 研究実施体制

(1)「町田」グループ

- ① 研究分担グループ長:町田 昌彦(日本原子力研究開発機構・システム計算科学センター、室長(研究主幹))
- ② 研究項目
 - 1) ミクロ (超伝導発現機構) :
 - ・ フェルミ原子ガスを通して見る室温超伝導の姿
 - ・ 2次元強相関電子系への超並列シミュレーションによるアプローチ
 - 2) メゾ (デバイス) :
 - ・ 高温超伝導体・固有ジョセフソン接合
 - ・ 各種超伝導体を幾何学的に配置することで得られる新奇デバイス機能
 - ・ 超伝導放射線検出
 - 3) マクロ (線材) :
 - ・ 磁束量子と複合欠陥とのマルチスケール・シミュレーション

(2)「林」グループ

- ① 研究分担グループ長:林 正彦(東北大学大学院情報科学研究科、准教授)
- ② 研究項目
 - ・ 微小超伝導系の電気伝導特性に関する理論解析とマルチスケールの理論構築
 - ・ ネットワーク及び層状ジョセフソン接合系における磁化特性と渦糸のダイナミクスに関する理論解析

(3)「小山」グループ

- ① 研究分担グループ長:小山 富男(東北大学、助教)
- ② 研究項目
 - ・ 磁束ピン止めマルチスケール・シミュレーションの基礎理論構築
 - ・ 固有ジョセフソン接合の量子論的位相ダイナミクス

(4)「大橋」グループ

① 研究分担グループ長:大橋 洋士(慶應義塾大学工学部、准教授)

② 研究項目

- ・ BCS-BEC クロスオーバー理論の超流動転移温度以下への拡張
- ・ BCS-BEC クロスオーバーにおける超流動粒子数・凝縮粒子数の研究
- ・ 光学格子中におけるフェルミ、ボーズ原子ガス超流動を扱う理論の構築の着手
- ・ Bogoliubov mode の異常トンネル効果

(5)「加藤」グループ

① 研究分担グループ長:加藤 勝(大阪府立大学大学院工学研究科、助教授)

② 研究項目

- 1) ラチェット効果を調べるため、サブミクロンサイズの超伝導ネットワークにおける渦糸の運動を有限要素法を用いて現象論的 Ginzburg-Landau 方程式を解き、シミュレーションを行う。
- 2) d-dot と呼ぶ複数の種類の超伝導体を組み合わせた超伝導複合体における磁束運動の制御を、2成分の Ginzburg-Landau 方程式を有限要素法を用いて数値的に解き調べ、新しい論理回路の提案を行う。
- 3) 異方的ナノサイズの超伝導体の超伝導対称性の形状依存性やエネルギーギャップ内の準粒子構造を微視的な Bogoliubov-deGennes 方程式を数値的に解くことで研究する。
- 4) 微小な超伝導板において生じる巨大磁束に関して、そのまわりの準粒子構造を微視的な Bogoliubov-de Gennes 方程式を数値的に解くことで調べ、走査型トンネル分光の実験で観測できる可能性を示す。
- 5) 現象論的な Ginzburg-Landau 方程式を数値的に解いて得られた超伝導ネットワークにおける磁束構造を、超伝導ネットワークを作成し、SQUID 顕微鏡で磁束を測定することで実証する。

(6)「柳澤」グループ

① 研究分担グループ長:柳澤 孝(産業技術総合研究所、研究グループ長)

② 研究項目

- ・ 2次元強相関系の超並列シミュレーションによる研究
- ・ 高温超伝導体固有ジョセフソン接合の研究

4. 研究成果の発表等

(1) 論文発表(原著論文)

「町田」グループ

- 1.1. M. Machida and T. Koyama, “Collective Dynamics of Macroscopic Quantum Tunneling in Layered High-Tc Superconductors”, *Supercond. Sci. Technol.*, 20 S23, (2007).
- 1.2. M. Mine, M. Okumura, T. Sunaga, and Y. Yamanaka, “Quantum field theoretical description of unstable behavior of trapped Bose–Einstein condensates with complex eigenvalues of Bogoliubov–de Gennes equations”, *Ann. Phys.* **322**, 2327 (2007).
- 1.3. C. Iniotakis, N. Hayashi, Y. Sawa, T. Yokoyama, U. May, Y. Tanaka, and M. Sigrist, “Andreev bound states and tunneling characteristics of a non-centrosymmetric superconductor”, *Phys. Rev. B* **76**, 012501 (2007).
- 1.4. E. Fukuyama, M. Mine, M. Okumura, T. Sunaga, and Y. Yamanaka, “Condition for the existence of complex modes in a trapped Bose-Einstein condensate with a highly quantized vortex”, *Phys. Rev. A* **76**, 043608 (2007).
- 1.5. Y. Nagai, Y. Kato, N. Hayashi, K. Yamauchi, and H. Harima, “Calculated positions of point nodes in the gap structure of the borocarbide superconductor $\text{YNi}_2\text{B}_2\text{C}$ ”, *Phys. Rev. B* **76**, 214514 (2007).
- 1.6. S. Yamada, T. Imamura, T. Kano, Y. Ohashi, H. Matsumoto, and M. Machida, “Ultra Large-scale Exact-diagonalization for Confined Fermion-Hubbard Model on the Earth Simulator : Exploration of Superfluidity in Confined Strongly-Correlated Systems”, *Journal of the Earth Simulator*, Vol. 7, June 2007, pp.23-35.
- 1.7. S. Yamada, M. Machida, Y. Ohashi, and H. Matsumoto, “Strong pairing and microscopic inhomogeneity of lattice fermion systems”, *Physica C*, Vol. 463-465, 2007, pp. 103-106.
- 1.8. M. Machida, M. Okumura, and S. Yamada, “Stripe Formation in Fermionic Atoms on 2-D Optical Lattice inside a Box Trap: DMRG Studies for Repulsive Hubbard Model with Open Boundary Condition”, *Phys. Rev. A* **77**, 033619 (2008)
- 1.9. M. Machida, T. Koyama, M. Kato and T. Ishida, “Direct Numerical Simulation for Non-equilibrium Superconducting Dynamics at the Transition Edge”, *J. Low Temp. Phys.* (in Press).
- 1.10. M. Machida and T. Koyama, “Theory for Collective Macroscopic Tunneling in High-Tc Intrinsic Josephson Junctions”, *Physica C* (in Press).

- 1.11. M. Machida and T. Koyama, "Collective Macroscopic Tunneling in Intrinsic Josephson Junctions", *Physica C* (in Press).
- 1.12. M. Machida, T. Kano, S. Yamada, M. Okumura, T. Imamura, and T. Koyama, "Quantum Synchronization Effects in Intrinsic Josephson Junctions", *Physica C* (in Press).
- 1.13. M. Machida, S. Yamada, T. Kano, M. Okumura, T. Imamura, and T. Koyama, "Quantum Effects on Capacitively-coupled Intrinsic Josephson Junctions", *J. Phys. Chem. Solids* (in Press).
- 1.14. M. Machida, S. Yamada, M. Okumura, Y. Ohashi, and H. Matsumoto, "Stripe Formation in Repulsive 4-leg Hubbard Ladder: Directly-extended DMRG Studies", *Physica C* (in Press).
- 1.15. M. Machida, S. Yamada, M. Okumura, Y. Ohashi, and H. Matsumoto, "Correlation Effects on Atom Density Profiles of 1-D and 2-D Polarized Atomic-Fermi-Gas Loaded on Optical Lattice", *Phys. Rev. A* (in Press).
- 1.16. S. Yamada, M. Okumura, M. Machida, Y. Ohashi, and H. Matsumoto, "Vortex Core Structure in Strongly-Correlated Superfluidity", *Physica C* (accepted).
- 1.17. K. Kobayashi, M. Mine, M. Okumura, and Y. Yamanaka, "Quantum field theoretical analysis on unstable behavior of Bose-Einstein condensates in optical lattices", *Ann. Phys.* (accepted).
- 1.18. N. Nakai, N. Hayashi, and M. Machida, "Ginzburg-Landau simulation for a vortex around a columnar defect in a superconducting film", *J. Phys. Chem. Solids* (accepted).
- 1.19. N. Hayashi, C. Iniotakis, M. Machida, and M. Sigrist, "Josephson effect between conventional and non-centrosymmetric superconductors", *J. Phys. Chem. Solids* (accepted).
- 1.20. M. Okumura, S. Yamada, and M. Machida, "DMRG Studies for 1-D Random Hubbard Chain Close to the Half-Filling", *J. Phys. Chem. Solids* (accepted).
- 1.21. N. Hayashi, C. Iniotakis, M. Machida, and M. Sigrist, "Josephson effect between conventional and Rashba superconductors", *Physica C* (accepted).
- 1.22. N. Nakai, N. Hayashi, and M. Machida, "Simulation studies for the vortex depinning dynamics around a columnar defect in superconductors", *Physica C* (accepted).
- 1.23. M. Okumura, S. Yamada, and M. Machida, "Hole localization in strongly-correlated and disordered systems: DMRG studies for 1-D and n-leg ladder random Hubbard models", *Physica C* (accepted).
- 1.24. Y. Nakamura, M. Mine, M. Okumura, and Y. Yamanaka, "Condition for

emergence of complex eigenvalues in the Bogoliubov-de Gennes equations”, *Phys. Rev. A* (accepted).

- 1.25. S. Yamada, M. Machida, T. Kano, T. Imamura, and T. Koyama, “On-site Pairing interaction and Quantum Coherence in Strongly Correlated Systems”, *Journal of Physics and Chemistry in Solids* (accepted).

「林」グループ

- 2.1. M. Hayashi, M. Suzuki, J. Onuki, H. Ebisawa, “Nonlinear dynamics of intrinsic Josephson junctions under an applied current” *Physica C*, 463-465 (2007) 993-996.
- 2.2. Masahiko Hayashi, Hiromichi Ebisawa and Kazuhiro Kuboki, “Mixed state of charge-density waves in ring-shaped single crystals” *Physical Review B*, 76 (2007) 014303.
- 2.3. Masahiko Hayashi, Tohru Kaiwa, Hiromichi Ebisawa, Yoshiaki Matsushima, Makoto Shimizu, Kazuo Satoh, Tsutomu Yotsuya and Takekazu Ishida, “On Mathematical Methods to Improve Imaging of Vortices using Scanning Superconducting Quantum Interference Device (SQUID) Microscope” *Journal of the Korean Physical Society* (to be published).
- 2.4. Masahiko Hayashi, Tohru Kaiwa, Hiromichi Ebisawa, Yoshiaki Matsushima, Makoto Shimizu, Kazuo Satoh, Tsutomu Yotsuya, Takekazu Ishida, "On Mathematical Methods to Improve Imaging of Vortices using Scanning Superconducting Quantum Interferometer Device (SQUID) Microscope", *Physica C* (to be published).

「小山」グループ

- 3.1. T.Koyama and M.Machida, “Quantum correction to the discrete breather in capacitively-coupled intrinsic Josephson junctions”, *Physica C* 460-462 (2007) 1305.
- 3.2. T.Koyama, M.Machida, M.Kato and T.Ishida, “Macroscopic quantum tunneling in intrinsic Josephson junctions containing magnetic flux”, *Physica C* 463-465 (2007) 985.
- 3.3. T.Koyama and M.Machida, “Effects of capacitive coupling on the escape rate in intrinsic Josephson junction stacks”, *J.Phys. Chem. Solid.* (in press)
- 3.4. T.Koyama and M.Machida, “Macroscopic quantum tunneling in a stack of capacitively-coupled intrinsic Josephson junctions”, *Physica C.* (in press)
- 3.5. H.Matsumoto, T.Koyama and M.Machida, “Electromagnetic wave in single- and

multi-Josephson junctions”, Physica C. (in press)

「大橋」グループ

- 4.1. Y. Ohashi, Superfluid Density in the BCS-BEC Crossover Regime of a Two-component Fermi Gas at Finite Temperatures.” Journal of Superconductivity and Novel Magnetism **20** (2007) 609-612.
- 4.2. E. Taylor, A. Griffin, and Y. Ohashi, “Spin-polarized Fermi superfluids as Bose-Fermi mixtures.” Phys. Rev. A **76** (2007) 023614(1-12).
- 4.3. Y. Ohashi, “Superfluid density in the BCS-BEC crossover regime of a Fermi superfluid.”, Physica C (2008), in press.

「加藤」グループ

- 5.1. Masaru Kato, Tomio Koyama, Masahiko Machida, Takekazu Ishida, “Superconducting symmetries of nano-structured anisotropic superconductors”, Physica C, 460-462 (2007) 1436-1437
- 5.2. Takekazu Ishida, Makoto Shimizu, Yoshiaki Matsushima, Masahiko Hayashi, Hiromichi Ebisawa, Osamu Sato, Masaru Kato, Kazuo Satoh and Tsutomu Yotsuya, "Vortex (particle) and antivortex (hole) doping into superconducting network", Physica C, 460-462 (2007) 1226-1227
- 5.3. Masaru Kato and Kazumi Maki, "Effects of weak impurity potential on the quasi-particle states in high-Tc superconductors", Physica C, 460-462 (2007) 1031-1032
- 5.4. Masaru Kato, Masaki Hirayama, Susumu Nakajima, Tomio Koyama, Masahiko Machida, Takekazu Ishida, “Artificial Spin System Using Composite Structures of d- and s-wave Superconductors”, Journal of Magnetism and Magnetic Materials, 310 (2007) 495-497
- 5.5. T. Ishida, Y. Matsushita, M Shimizu, M. Kato, M. Hayashi, H. Ebisawa, K. Satoh, T. Yotsuya, O. Sato, "Vortex Doping into Finite-Sized Superconducting Networks", International Journal of Modern Physics B, 21 (2007) 3177-3179.
- 5.6. Masaru Kato, Tomio Koyama, Masahiko Machida, Takekazu Ishida, “Anisotropic superconductors in nano-structures”, Physica C, 463-465, (2007) 254-257
- 5.7. Hisataka Suematsu, Masaru Kato, Tomio Koyama, Masahiko Machida, Takekazu Ishida, "Quasi-particle spectrum of giant vortex states in a square nanoscopic superconducting plate", Physica C, 463-465, (2007) 262-265
- 5.8. Osamu Sato, Masaru Kato, , "Penetrations And Dynamics of Vortices in Mesoscopic Superconducting Plates", Physica C, 463-465, (2007) 258-261

- 5.9. M. Nishikawa, M. Kato and T. Ishida, "Numerical simulation for thermal relaxation of hot spot in MgB2 neutron detector", *Physica C*, 463-465, (2007) 1115-1118

「柳澤」グループ

- 6.1. T. Yanagisawa, Quantum Monte Carlo Diagonalization for Many-Fermion Systems, *Physical Review B* 75, 224503 (2007).
- 6.2. T. Yokoyama, S.Kawabata, T. Kato, and Y. Tanaka, Theory of macroscopic quantum tunneling in high-Tc c-axis Josephson junctions, *Physical Review B* 76, 134501 (2007).
- 6.3. I. Hase and T. Yanagisawa, Madelung Energy of the Valence Skipping Compound BaBiO₃, *Physical Review B* 76, 174103 (2007).
- 6.4. T. Yanagisawa, Phase diagram of the t-U2 Hamiltonian of Weak Coupling Hubbard Model, *New Journal of Physics* 10, 023014 (2008).
- 6.5. T. Yanagisawa, Supersymmetry and Superconductor-Insulator Transition, *Progress of Theoretical Physics* 118, 229 (2007).
- 6.6. T. Yanagisawa, I. Hase and K. Yamaji, Effective Quantum Variational Monte Carlo Study of Hubbard Model, *Journal of Magnetism and Magnetic Materials* 310, 486-488 (2007).