# 曲面の変分問題

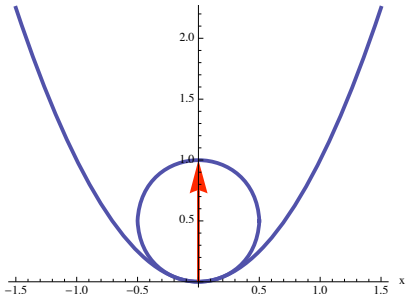
## — 極小曲面論入門 II —

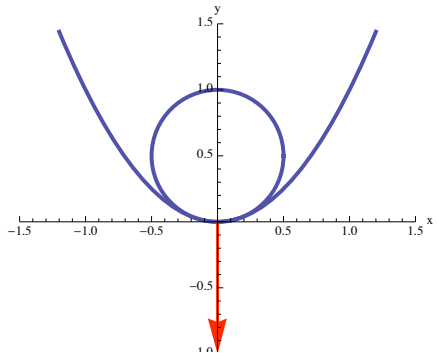
「さきがけ数学塾」2011 年 3 月 8 日

小磯深幸 (九州大学大学院数理学研究院 & JST さきがけ)

# 2　平面曲線の曲率

平面曲線 $\gamma$ の単位法ベクトル場を一つ決めて，それを $N$ とする．$P \in \gamma$ とする．$\gamma$ に $P$ で 2 次の接触をする円を $C(P)$ とし，その半径を $r(P)$ とおく．$\pm 1/r(P)$ を，曲線 $\gamma$ の点 $P$ における曲率といい，$\kappa(P)$ で表す．ただし，$\gamma$ が $N$ と同じ向きに曲がっているとき $\kappa > 0$，反対の向きに曲がっているとき $\kappa < 0$ と定める．




たとえば，放物線 $y = x^2$ の頂点における曲率 $\kappa$ は，

$$N = (0, 1) \Longrightarrow \kappa = 2, \qquad N = (0, -1) \Longrightarrow \kappa = -2$$

例 **2.0.1.** 直線の曲率は $0$, 半径 $r > 0$ の円の曲率は，$\pm 1/r$ である.

【曲率についての公式】$\gamma$ は $P$ で円 $C(P)$ と 2 次の接触をするから，$P$ で $\gamma$ と $C(P)$ の接線の変化率は等しい．これより，$\gamma$ を

$$\gamma(s) = (x(s), y(s)), \quad |\gamma'(s)| = 1$$

とパラメータ表示する (時刻 $s$ における点の位置を $\gamma(s)$ とすると，$\gamma(s)$ は曲線上を速さ 1 で進む．$s$ をこの曲線の弧長パラメータという) と，

$$\gamma'(s) = (\cos\theta(s), \sin\theta(s)), \quad N = (-\sin\theta(s), \cos\theta(s))$$

と書けて，$\kappa(s) = \theta'(s)$, $|\kappa(s)| = |\gamma''(s)|$.

一般のパラメータ $t$ で表示された曲線 $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ に対して曲率 $\kappa$ を計算すると，$\kappa = (\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y})((\dot{x})^2 + (\dot{y})^2)^{-3/2}$．ここで，$\dot{x} = dx/dt$, $\ddot{x} = d^2x/dt^2$ **etc.**

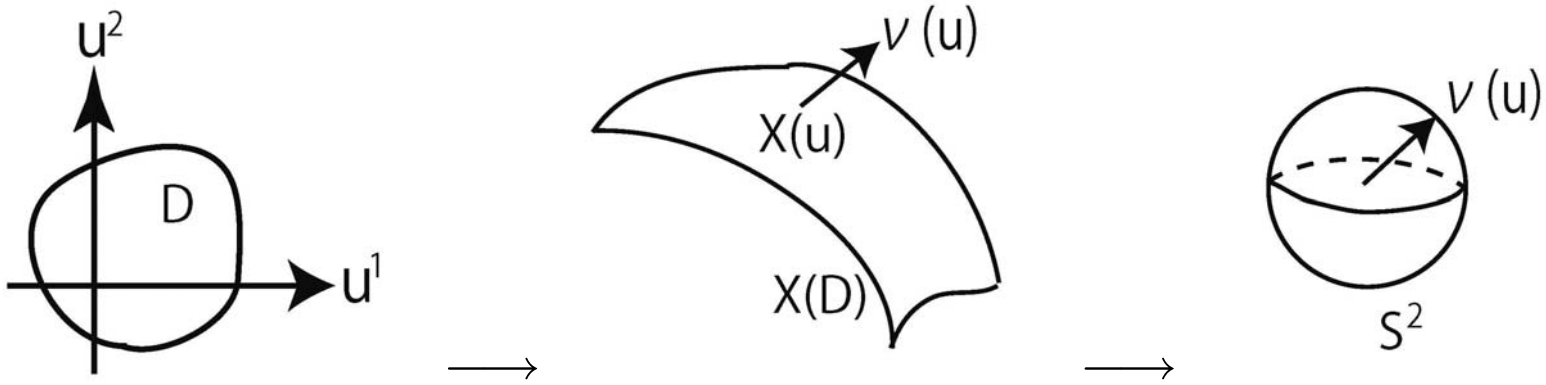
# 3　$\mathbf{R}^3$ 内の曲面の曲率

$\mathbf{R}^2$ の閉領域 $D$ から $\mathbf{R}^3$ への $C^\infty$ 写像

$$X : D \to \mathbf{R}^3, \quad X(u) = (x^1(u), x^2(u), x^3(u)),\ u = (u^1, u^2) \in D$$

が「はめ込み」であるとは，$X_{u^1}$, $X_{u^2}$ が $D$ の各点で 1 次独立 (つまり，$X$ の像が $\mathbf{R}^3$ 内の滑らかな曲面) の時をいう．$X$ の単位法ベクトル場 (**Gauss** 写像)$\nu : D \to S^2$ は次で与えられる．

$$\nu = X_1 \times X_2 / |X_1 \times X_2|, \qquad X_j := \partial X / \partial u^j,$$



$g_{ij} = \langle X_i, X_j \rangle$, $h_{ij} = \langle \nu, X_{ij} \rangle (= -\langle \nu_i, X_j \rangle)$ とおき，$X$ の第 1 基本形式，第 2 基本形式を，

$$ds^2 = g_{ij} du^i du^j, \quad II = h_{ij} du^i du^j$$

と定義する．(上式で，$\sum_{i,j=1,2}$ を省略している．$\langle *, * \rangle$ は $\mathbf{R}^3$ での内積．)

【$du^2$, $II$ の図形的意味】 $|du^1|$, $|du^2|$ が小さい時，

$$ds \approx |X(u^1 + du^1, u^2 + du^2) - X(u^1, u^2)|$$

$II \approx 2 \times \big($点 $X(u^1, u^2)$ での接平面からの，点 $X(u^1 + du^1, u^2 + du^2)$ の高さ$\big)$

$(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$ とおき，$X$ の平均曲率 $H$，**Gauss** 曲率 $K$ を，$H = \dfrac{1}{2} g^{ij} h_{ij}$，$K = \dfrac{\mathbf{det}(h_{ij})}{\mathbf{det}(g_{ij})}$ と定義．$H$, $K$ の図形的意味は §**4** で説明する．

$X$ の面積 $A(X)$ は，$A(X) := \int_D d\Sigma$. ただしここで，

$d\Sigma := \sqrt{\det(g_{ij})}\ du^1 du^2 = |X_1 \times X_2|\ du^1 du^2$. ($X$ の面積要素という．)

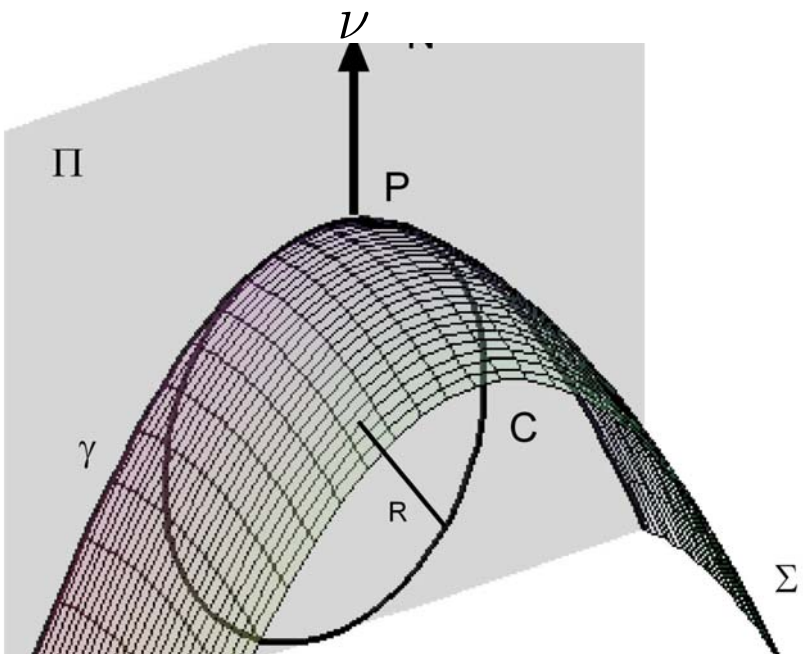
# 4 極小曲面の定義と特徴付け

以下では，曲面は 2 次元可微分多様体 $\Sigma$ から $\mathbf{R}^3$ へのはめ込み

$$X : \Sigma \to \mathbf{R}^3, \quad X(u) = (x^1(u), x^2(u), x^3(u)),\ u = (u^1, u^2) \in \Sigma$$

で表す．(2 次元可微分多様体とは，円板を滑らかに変形したもの達を，滑らかにつないだもの．)

$\nu$ を，曲面 $\Sigma$ の点 $P$ での単位法ベクトルとする．平面 $\Pi \supset \nu$ に対し，$\gamma := \Pi \cap \Sigma$，$P$ での $\nu$ に対する $\gamma$ の曲率を $k(\Pi)$ とおく．$k_1 = \mathbf{max}_{\Pi \supset \nu} k(\Pi)$, $k_2 = \mathbf{min}_{\Pi \supset \nu} k(\Pi)$ を $\Sigma$ の $P$ での主曲率という．




$k(\Pi) = \pm R^{-1}$

$H(P) := \dfrac{k_1(P) + k_2(P)}{2}$ (平均曲率)，$K(P) := k_1(P)k_2(P)$ (**Gauss 曲率**)．$H$ が定数のとき平均曲率一定曲面，$H \equiv 0$ のとき極小曲面．

例 **4.0.2.** **(i)** 平面の平均曲率は至る所 $0$.

**(ii)** 半径 $r > 0$ の球面の平均曲率は $\pm 1/r$.

**(iii)** 半径 $r > 0$ の円柱の表面の平均曲率は $\pm 1/(2r)$.

例 **4.0.3.** 平均曲率一定 **(CMC)** の回転面は，次の **6** つに分類される： 平面，**catenoid** (懸垂面)，円柱，**unduloid**，球面，**nodoid**.

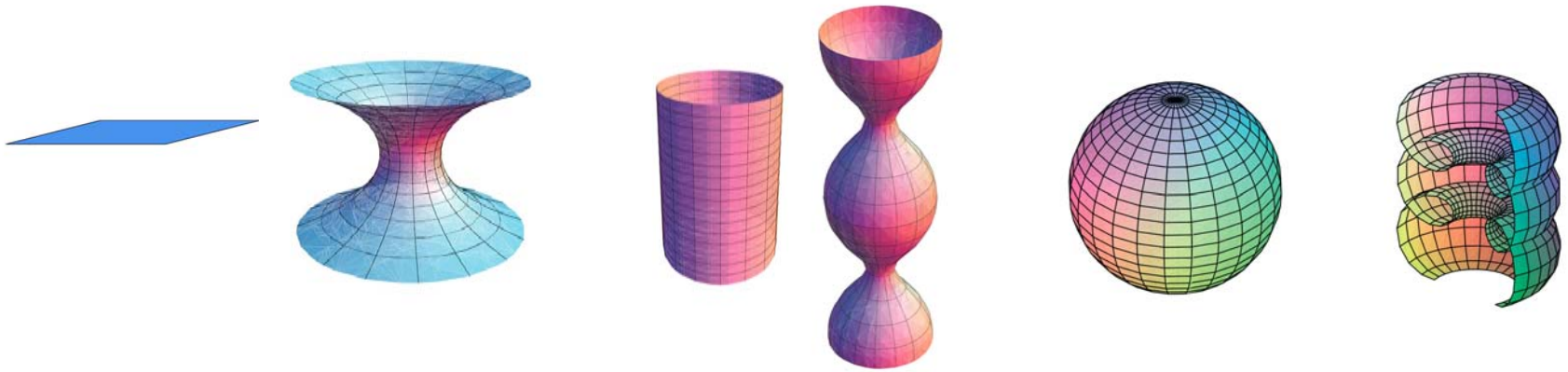
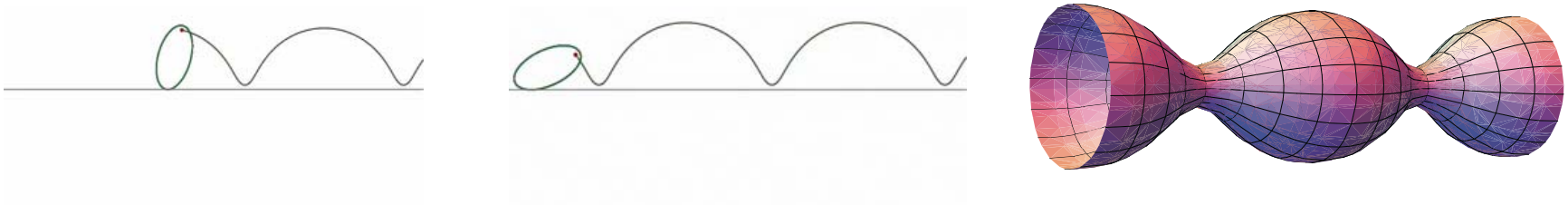
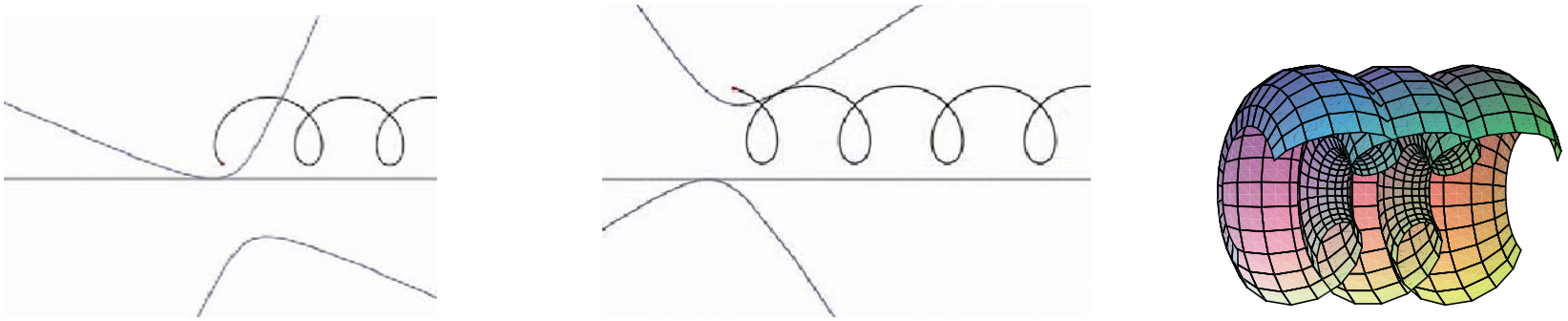


Figure 1: **Delaunay** 曲面 (平均曲率一定の回転面)

懸垂面，**unduloid**，**nodoid** の母線は，放物線，楕円，双曲線を直線に沿って転がしたときの焦点の軌跡として得られる．これは，**CMC** 回転面の母線が満たす **2** 階の常微分方程式を用いて証明される．



**unduloid** の一部 (右図) とその母線



**nodoid** の一部 (右図) とその母線

$xz$ 平面内の弧長表示された曲線

$$\gamma(s) = (p(s), q(s)), \quad |\gamma'(s)| = 1, \quad p > 0$$

を $z$ 軸を中心に回転させて得られる曲面は

$$X = (p(u^1)\cos(u^2), p(u^1)\sin(u^2), q(u^1))$$

と表示される．$X$ の主曲率は $p'q'' - p''q'$，$p^{-1}q'$ だから，

$$H = \frac{1}{2}\left(p'q'' - p''q' + p^{-1}q'\right)$$

## 4.1 極小曲面の変分問題の解としての特徴付け

以下，特に断らない限り，考える曲面は向き付け可能 (表と裏の区別がつく) でコンパクト (有界閉集合) と仮定する．

$X(\epsilon) = X + (\xi + f\nu)\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2)$ を $X$ の境界を固定する変分とする．すなわち，$X(\epsilon)(u) : (-\epsilon_0, \epsilon_0) \times \Sigma \to \mathbf{R}^3$ は $C^\infty$ 級写像で，

$$X(0)(u) = X(u),\ \forall u \in \Sigma, \quad X(\epsilon)(\zeta) = X(\zeta),\ \forall \zeta \in \partial\Sigma,\ \forall \epsilon \in (-\epsilon_0, \epsilon_0)$$

を満たす．ただしここで，$\partial\Sigma$ は $\Sigma$ の境界である．また，ここで，$f : \Sigma \to \mathbf{R}$ であり，$\xi$ は変分ベクトル場 $\delta X := (\partial X(\epsilon)/\partial\epsilon)_{\epsilon=0} = \xi + f\nu$ の接成分であって，共に $\partial\Sigma$ 上 $0$ である．

**補題 4.1.1.** 面積 $A$ の第 1 変分は次で与えられる．

$$\delta A := \frac{d}{d\epsilon} A(X(\epsilon))|_{\epsilon=0} = -2\int_\Sigma Hf\, d\Sigma, \quad f := \left\langle \frac{\partial X(\epsilon)}{\partial\epsilon}\Big|_{\epsilon=0}, \nu \right\rangle \tag{1}$$

補題 **4.1.1** より，

**命題 4.1.1.** 曲面 $X$ が極小曲面であることと，$X$ の境界を固定する任意の変分に対して面積の第 1 変分が $0$ であることは同値である．

## 4.2 Plateau 問題

与えられた閉曲線を境界とするコンパクトな極小曲面を研究せよ，という問題を **Plateau** 問題というのであった.

**定理 4.2.1.** $\Gamma$ を平面 $P$ 上の有限個の閉曲線の和集合とする．このとき，$\Gamma$ を境界とするコンパクトな (しかし連結とはかぎらない) 極小曲面は $P$ に含まれる．

より一般に，

**補題 4.2.1.** 有限個の閉曲線の和集合 $\Gamma$ が半空間 $K$ に含まれているならば，$\Gamma$ を境界とするコンパクトな極小曲面は $K$ に含まれる．

補題 **4.2.1** の系として次が得られる．

**定理 4.2.2.** 有限個の閉曲線の和集合 $\Gamma$ を境界とするコンパクトな極小曲面は，$\Gamma$ の凸包 ($\Gamma$ を含む最小の凸集合) $K$ に含まれる．

**定理 4.2.3.** 境界のないコンパクトな極小曲面は $\mathbf{R}^3$ 内には存在しない．

# 5　極小曲面の等温座標表示

極小曲面は，等温座標を用いて簡単に表示することができる.

## 5.1　等温座標

**定義 5.1.1.** 曲面の表示 $X(u)$ が $|X_1| = |X_2|$, $\langle X_1, X_2 \rangle = 0$ を満たしているとき，等温座標表示 であるという．この時，$u = (u^1, u^2)$ は等温座標であるという．(この時，定義域における **2** つの接ベクトルの成す角は，曲面に写っても変わらない．)

$\mathbf{R}^3$ の原点を中心とする単位球面 $S^2$ から北極 $N=(0,0,1)$ を除いた部分 $S^2\setminus\{N\}$ を $S^2_*$ とおく．$A\in S^2_*$ に対し，直線 $AN$ と $xy$ 平面 $\mathbf{R}^2$ との交点を $P(A)$ とおく．写像 $P: S^2_*\to\mathbf{R}^2$ を 立体射影 とよぶ．

**命題 5.1.1.** 球面の立体射影は等温座標である．立体射影の逆写像 $\varphi$ は球面の等温座標表示である．

*Proof.* $P((x,y,z))=(1-z)^{-1}(x,y)$ だから，

$$\varphi(u,v)=(r^2+1)^{-1}(2u,2v,r^2-1),\quad (r^2:=u^2+v^2).$$

よって，$|\varphi_u|^2=|\varphi_v|^2=4(r^2+1)^{-2}$, $\langle\varphi_u,\varphi_v\rangle=0$. □

**問 5.1.1.** 立体射影によって球面の小円（または大円）は平面の直線又は円にうつること，逆に平面の直線と円は立体射影の逆写像によって球面の小円にうつることを示せ．

## 5.2 Gauss 写像

定義 **5.2.1.** 曲面 $X : \Sigma \to \mathbf{R}^3$ に対し，その単位法ベクトル場 $\nu$ を $S^2$ への写像 $\nu : \Sigma \to S^2$ とみたものを **Gauss 写像** とよぶ．また，立体射影との合成 $\rho = P \circ \nu : \Sigma \to \mathbf{R}^2$ も **Gauss 写像**とよぶ．

問 **5.2.1.** **Gauss 写像の像が 1 点になる曲面**，及び，**1** つの曲線になる曲面を特徴づけよ．(平面，線織面)

命題 **5.2.1.** 極小曲面は，**Gauss** 曲率が $0$ でない点の近傍では **Gauss** 写像の立体射影 $P \circ \nu$ の逆写像を用いて表示できる．しかも，この表示は等温座標表示である．

証明はあと (§**6.2**) で行う．

## 5.3 調和関数

前節で，極小曲面の相当部分は等温座標で表示できることがわかった．逆に，一般の曲面 $M$ の等温座標表示 $X(u^1, u^1) = (x^1(u^1, u^2), x^3(u^1, u^2), x^3(u^1, u^2))$ が与えられているとする．(すなわち，$|X_1|^2 = |X_2|^2 =: f$, $\langle X_1, X_2 \rangle = 0$.) このとき，

$$\langle X_{11} + X_{22}, X_1 \rangle = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u^1}|X_1|^2 - \langle X_2, X_{21} \rangle = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u^1}\{|X_1|^2 - |X_2|^2\} = 0,$$

$$\langle X_{11} + X_{22}, X_2 \rangle = 0,$$

$$\langle X_{11} + X_{22}, \nu \rangle = h_{11} + h_{22} = f g^{ij} h_{ij} = 2Hf.$$

つまり $X_{11} + X_{22} = 2Hf\nu$ である．(注：$X_{11} + X_{22} = X_{u^1u^1} + X_{u^2u^2}$)

命題 **5.3.1.** 曲面 $M$ の等温座標表示 $X$ について，曲面 $M$ が極小曲面であることと $X$ の各成分関数が調和関数であることは同値である．

注意 **5.3.1.** 任意の曲面は等温座標で表示できることが知られているが，証明はしない．今後，等温座標が存在することは認めて議論をすすめる．

問 **5.3.1.** 懸垂曲面，回転面の等温座標表示を与えよ．

# 6 Weierstarss-Enneper の表現公式

極小曲面 $X=(x,y,z)$ は臍点 (主曲率 $k_1$, $k_2$ が一致する点) を除き（必要ならば座標軸をとりかえることにより），局所的には，微分可能な複素関数 (正則関数という) $f(w)$ を用いて次のように表される.

$$(x,y,z)=\mathbf{Re}\Big(\int_{w_0}^{w}(1-w^2)f(w)dw,\ \int_{w_0}^{w}i(1+w^2)f(w)dw,\ \int_{w_0}^{w}2wf(w)dw\Big)$$

この表現公式は **Enneper(1864 年)** と **Weierstrass(1866 年)** によって独立に導き出された (**Weierstrass-Enneper の表現公式**という).

正則関数 $f(w)$ を具体的に与えて **Weierstrass-Enneper** の表現公式を用いることにより，極小曲面の具体例をいくらでも得ることができる．これはすごいことで，例えば，平均曲率一定曲面ですらこのようにうまくはいかない.

$f(w) = 1$ は **Enneper** の極小曲面を与える.

$f(w) = k/2w^2$（$k$ は実数）は懸垂曲面を与える.

$f(w) = ik/2w^2$ （$k$ は実数）は常螺旋面を与える.

$f(w) = 2/(1 - w^4)$ は **Scherk** の極小曲面を与える.

$f(w) = (1 - 14w^4 + w^8)^{-1/2}$, は **Schwarz** と **Riemann** によって発見された空間四辺形を張る極小曲面を与える.

**[1]** 常らせん面 **(helicoid)**

$$x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ z = kv$$

**[2]** 懸垂曲面 **(catenoid)**

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{a}{2}\left(e^{z/a} + e^{-z/a}\right),\ (a > 0)$$

**[3] Scherk** の極小曲面

$$z = \log_e\left(\frac{\cos y}{\cos x}\right)$$

**[4] Enneper** の極小曲面

$$x = u - \frac{u^3}{3} + uv^2,\ y = -v + \frac{v^3}{3} - u^2 v,\ z = u^2 - v^2$$

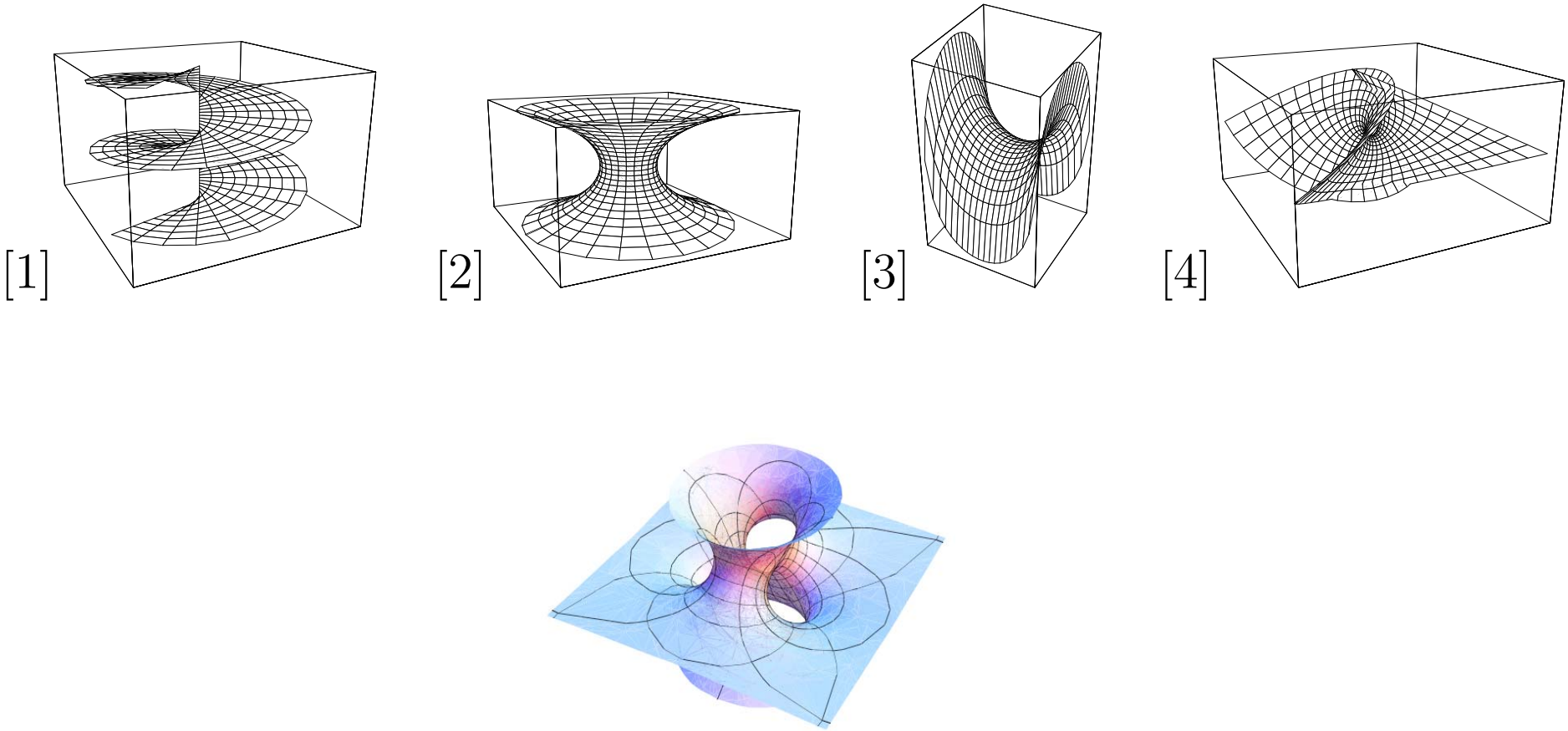



Figure 2: **Costa** 曲面．自己交差をもたない完備極小曲面で **4** 番目に発見された．(平面，懸垂面，常螺旋面，**Costa** 曲面 (**1984** 年) の順．)

**Weierstrass-Enneper** の表現公式は，極小曲面の一般的な性質の研究に用いられる一方で，著しい性質を持つ極小曲面の新しい例の構成に利用されている．とりわけ，極小曲面の具体例の構成に，この公式は欠くことができない．以下では，より一般な公式 (やはり，**Weierstrass-Enneper** の表現公式と呼ばれる) について解説する．

## 6.1 正則座標

$\xi = (\xi^1, \xi^2, \xi^3)$, $\eta = (\eta^1, \eta^2, \eta^3) \in \mathbf{C}^3$ に対し，$\langle \xi, \eta \rangle := \xi^1\eta^1 + \xi^2\eta^2 + \xi^3\eta^3$ と定める．**Hermite** 内積ではなく，$|\xi|^2 = \langle \xi, \overline{\xi} \rangle$ となる．

等温座標表示 $X(u)$ において，$X$ が調和であることとベクトル値関数 $\xi := X_1 - \sqrt{-1}\, X_2$ が $z := u^1 + \sqrt{-1}\, u^2$ の正則関数であることとは同値である (**Cauchy-Riemann** の方程式からしたがう)．

逆に，ある一般の表示 $X(u)$ で $\xi := X_1 - \sqrt{-1}\, X_2$ が $z := u^1 + \sqrt{-1}\, u^2$ の正則関数であるとする．そのとき，

$$\langle \xi, \xi \rangle = (|X_1|^2 - |X_2|^2) - 2\sqrt{-1}\, \langle X_1, X_2 \rangle.$$

命題 **6.1.1.** 曲面の表示 $X(u)$ が極小曲面を等温座標で表示したものであることと，$\langle \xi, \xi \rangle = 0$ なる正則関数 $\xi$ を用いて $X = \mathbf{Re} \displaystyle\int \xi\, dz$ と表せることとは同値である．

## 6.2 Weierstrass-Enneper の表現公式

上のことから，極小曲面を求めることは **3** つの正則関数 $\xi^i$ で $(\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 + (\xi^3)^2 = 0$ なるものを求めることに帰着する．

$F := \xi^1 - \sqrt{-1}\,\xi^2$, $G := \xi^3/F$ によって正則関数 $F$ と有理型関数 $G$ を定める．$F = 0 \Longleftrightarrow \nu = (0,0,1)$ であることが示せる．

$\xi^1 - \sqrt{-1}\,\xi^2 = F$ と $(\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 = -(\xi^3)^2 = -F^2G^2$ とから $\xi^1 = \dfrac{F}{2} \cdot (1 - G^2)$, $\xi^2 = \dfrac{\sqrt{-1}\,F}{2} \cdot (1 + G^2)$, $\xi^3 = FG$ を得る．これより，

**定理 6.2.1** (**Weierstrass-Enneper の表現公式**). 単位法ベクトル $\nu$ が北極を向いている点を除いて，単連結な極小曲面は正則関数 $F$, $G$ を用いて $X = \mathbf{Re} \int \xi \, dz$ と表示される．ここで，

$$\xi = \begin{bmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{bmatrix} = \frac{F}{2} \begin{bmatrix} 1 - G^2 \\ \sqrt{-1}\,(1 + G^2) \\ 2G \end{bmatrix}.$$

逆に，単連結領域 $D$ 上の正則関数 $F$ と有理型関数 $G$ について，$F$ の $2m$ 位の零点がちょうど $G$ の $m$ 位の極であるならば，上のように定義される $X$ は極小曲面である．

この正則関数 $G$ は以下のように **Gauss** 写像とみなされる．

計算により,

$$\xi\times\overline{\xi} = \frac{|F|^2}{2}(1+|G|^2)\begin{bmatrix}\sqrt{-1}\,(G+\overline{G})\\ G-\overline{G}\\ \sqrt{-1}\,(|G|^2-1)\end{bmatrix}, \quad \nu = \frac{1}{1+|G|^2}\begin{bmatrix}G+\overline{G}\\ -\sqrt{-1}\,(G-\overline{G})\\ |G|^2-1\end{bmatrix}.$$

よって $\nu$ を立体射影で射影した先は $\frac{1}{2}\begin{bmatrix}G+\overline{G}\\ -\sqrt{-1}\,(G-\overline{G})\end{bmatrix}$ になる. $\mathbf{R}^2$ を $\mathbf{C}$ と同一視すればこれは $G$ に他ならない.

命題 **6.2.1.** **Weierstrass** 表示において, $G$ は **Gauss** 写像 $P\circ\nu$ である.

計算により,

命題 **6.2.2. Weierstrass-Enneper** の表現公式において,

$$[g_{ij}] = \frac{|F|^2}{4}(1+|G|^2)^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad [h_{ij}] = \begin{bmatrix} -\mathbf{Re}(FG') & \mathbf{Im}(FG') \\ \mathbf{Im}(FG') & \mathbf{Re}(FG') \end{bmatrix}.$$

主曲率は $\dfrac{\pm 4|G'|}{|F|(1+|G|^2)^2}$, **Gaus** 曲率 $K$ は $-\left(\dfrac{4|G'|}{|F|(1+|G|^2)^2}\right)^2$.

命題 **5.2.1** 極小曲面は, **Gauss** 曲率 $K$ が $0$ でない点の近傍では **Gauss** 写像の立体射影 $P \circ \nu$ の逆写像を用いて表示できる. しかも, この表示は等温座標表示である.

*Proof.* $K \neq 0 \Longleftrightarrow G' \neq 0$ である. よって, $K \neq 0$ なる点の近傍で, **Gauss** 写像 $G$ は同相写像である. □

**定理 6.2.2.** 平面でない完備極小曲面について，$K = 0$ なる点は孤立している．

*Proof.* $K = 0 \Longleftrightarrow G' = 0$ である．$G'$ は正則関数だから，$K = 0$ なる点が極小曲面 $M$ の内部で集積点を持てば，$G' \equiv 0$ である．よって，$G$ は定数，すなわち $M$ は平面である． □

**問 6.2.1.** 極小曲面を回転させると $\{F, G\}$ はどのように変換されるか?

**問 6.2.2.** $\{F, G\}$ で表示された極小曲面 $M$ がある．それに **Gauss** 写像で座標をいれると，$\{F, G\}$ はどのように変換されるか?

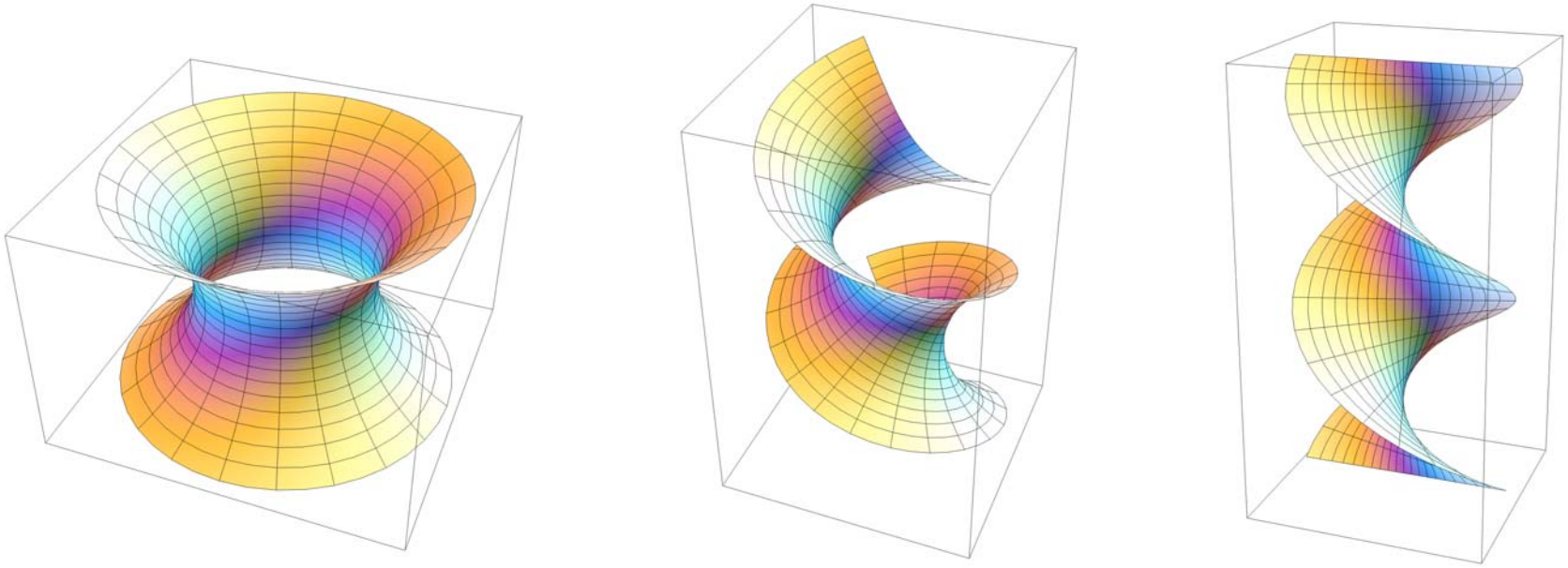
## 6.3 随伴極小曲面

極小曲面 $X$ が関数 $F$, $G$ を用いて **Weierstrass-Enneper** の表現公式により定義されたとき，$e^{i\theta}F$ と $G$ を用いて定義される極小曲面を $X_\theta$ とおく．命題 **6.2.2** より

$$[g_{ij}] = \frac{|F|^2}{4}(1+|G|^2)^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

だから，$X_\theta$ の第 **1** 基本形式は $X$ の第 **1** 基本形式と一致する．すなわち，$X_\theta$ はすべて等長である．$X_\theta$ を $X$ の随伴極小曲面という．特に，$X_{\pi/2}$ を $X$ の共役極小曲面という．

例 **6.3.1.** 懸垂面と常螺旋面は共役である.



懸垂面 (左), その随伴極小曲面の一つ (中), 常螺旋面 (右)

**例 6.3.2.** SchwarzP 曲面と SchwarzD 曲面は共役である． Gyroid はこれらの随伴極小曲面である．これらは，ナノスケールやミクロスケールのソフトマターなどの自然現象にしばしば現れる．(「曲面の変分問題 — 極小曲面論入門 I —」参照．)

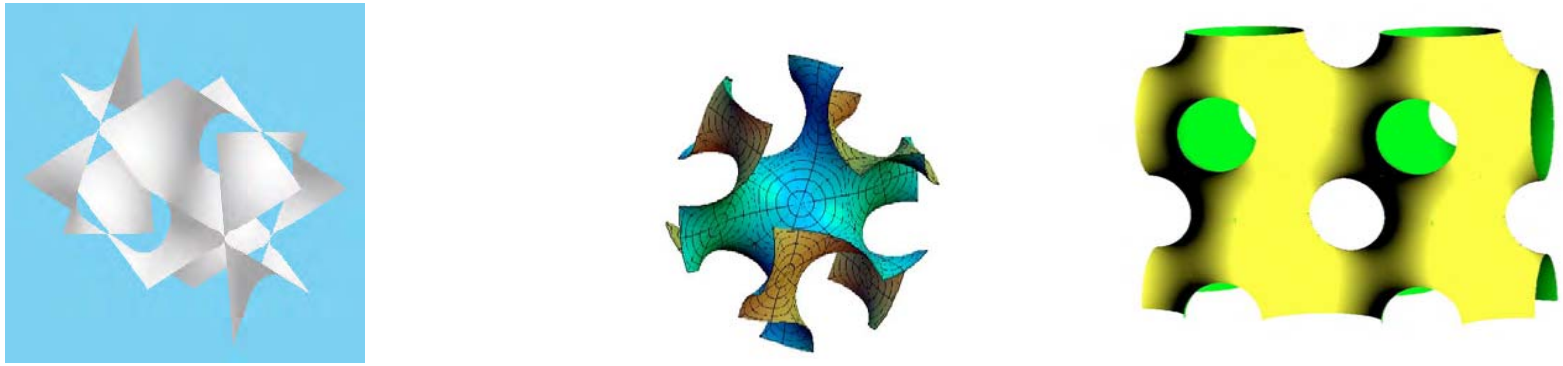


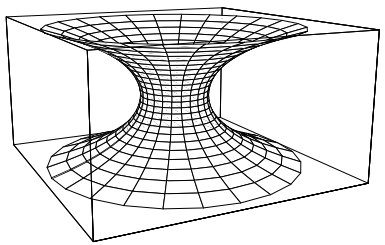
Figure 3: 左から，SchwarzD 曲面，Gyroid，SchwarzP 曲面．

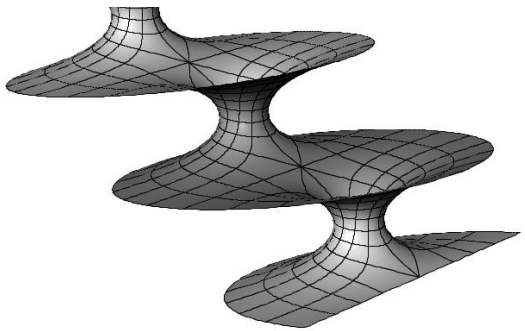
## 6.4　極小曲面に対する鏡像の原理とその応用

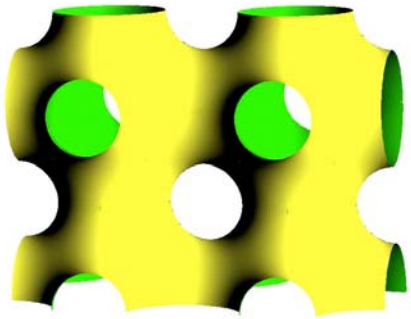
すでにみたように，極小曲面は等温座標を用いて表示することができ，そのとき曲面の各座標関数は調和関数である．調和関数に対する鏡像の原理を用いることにより，極小曲面に対する鏡像の原理が示せる．

**定理 6.4.1** (鏡像の原理)**.** **(i)** 極小曲面 $\Sigma$ が線分 $\ell$ を含むならば，$\Sigma$ は $\ell$ に関して対称である．

**(ii)** 極小曲面 $\Sigma$ が平面 $\Pi$ と直交するならば，$\Sigma$ は $\Pi$ に関して対称である．



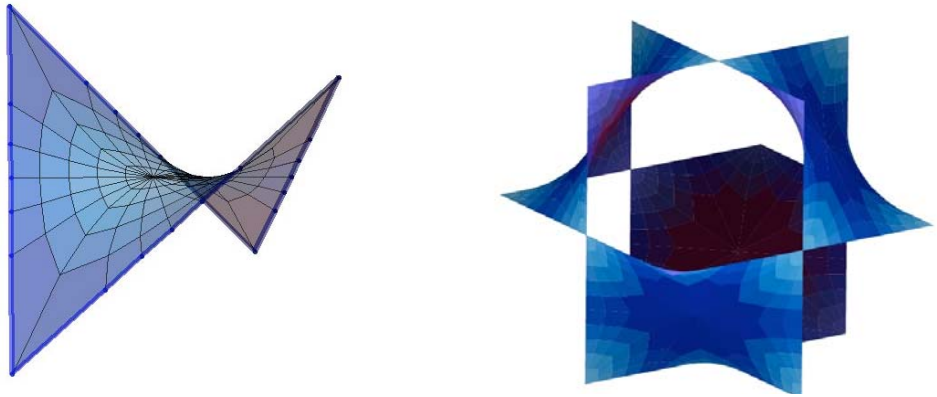




**定理 6.4.2** (鏡像の原理). **(i)** 極小曲面 $\Sigma$ の境界が線分 $\ell$ を含むならば，$\Sigma$ は $\ell$ を超えて極小曲面として拡張できる.

**(ii)** 極小曲面 $\Sigma$ の境界が平面 $\Pi$ と直交するならば，$\Sigma$ は $\Pi \cap \Sigma$ を超えて極小曲面として拡張できる.

**Weierstrass-Enneper** の表現公式を用いて単連結極小曲面を作り，鏡像の原理を用いてその極小曲面を拡張することができる．この方法を応用してさまざまな三重周期極小曲面の例が構成されている.



**Schwarz D** 曲面 (図の出典：岡山大学・藤森祥一氏の **HP**)

## 6.5 Gauss 写像と Gauss 曲率についての補足

**定理 6.5.1 (H. Fujimoto, 1988).** $\mathbf{R}^3$ 内の完備な極小曲面の Gauss 写像の像は，$S^2$ の高々4 点を除外する．

この評価は sharp である．(4 点を除外する例：Scherk 曲面，他．)

**定理 6.5.2 (R. Osserman, 1964).** $\mathbf{R}^3$ 内の完備で全曲率 $\int_\Sigma K d\Sigma$ が有限な極小曲面の Gauss 写像の像は，$S^2$ の高々3 点を除外する．

**未解決問題 6.5.1.** この結果は sharp か?

**定理 6.5.3 (R. Osserman, 1964).** $\mathbf{R}^3$ 内の完備で向き付け可能な極小曲面 $\Sigma$ の全曲率 $\int_\Sigma K\ d\Sigma$ が有限ならば，$\Sigma$ はコンパクト Riemann 面 $\overline{\Sigma}$ から有限個の点を除いたものと共形同値である．さらにこの時，$\Sigma$ の Gauss 写像 $\nu$ は $\overline{\Sigma} \to S^2$ に拡張できる．

**定理 6.5.4.** $\Sigma$ は $\mathbf{R}^3$ 内の完備で向き付け可能な極小曲面とする．$\Sigma$ の全曲率 $\displaystyle\int_\Sigma K\ d\Sigma$ が有限ならば，$\displaystyle\int_\Sigma K\ d\Sigma = -4m\pi\ (m = 0, 1, 2, ...)$ である．

*Proof.* **Gauss** 写像 $G = P \circ \nu$ について，$G' = 0$ なる点 ($\nu : \Sigma \to S^2$ が局所的に単射でない点) は孤立している．このことと定理 **6.5.3** から，$\nu$ の像は (有限個の点を除き)$S^2$ 全体を有限回覆う．故に，全曲率 $= -(\nu$ の像の面積$) = -4m\pi$. □

**定理 6.5.5.** $\mathbf{R}^3$ 内の完備な極小曲面で，全曲率が $0$ のものは平面，$-4\pi$ のものは **Enneper** の極小曲面と懸垂面のみである．

# 7　面積の第 2 変分公式と安定性

以下では，曲面 $X$ の変分を $X(\epsilon)$ で表し，$X_\epsilon$ は $\partial X(\epsilon)/\partial\epsilon$ を意味するものとする．また，特に断らない限り，考える曲面は向き付け可能と仮定する．

## 7.1　面積の第 2 変分公式

面積の第 1 変分は $\dfrac{d}{d\epsilon}\mathrm{Area}(X(\epsilon)) = -2\displaystyle\int H\cdot\langle X_\epsilon,\nu\rangle\, d\Sigma$ だった．$X(0)$ が極小曲面なら $\epsilon=0$ において $H=0$ だから，

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{d\epsilon^2}\Big|_{\epsilon=0}\mathrm{Area}(X(\epsilon)) &= -2\int\Big[H_\epsilon\cdot\langle X_\epsilon,\nu\rangle d\Sigma + H\cdot(\langle X_\epsilon,\nu\rangle\, d\Sigma)_\epsilon\Big]\Big|_{\epsilon=0}\\ &= -2\int H_\epsilon\cdot\langle X_\epsilon,\nu\rangle\, d\Sigma\Big|_{\epsilon=0}.\end{aligned}$$

一般の曲面の変分ベクトル場 $V = u\nu$ について $H_\epsilon$ を求めると,

$$2H_\epsilon = \sqrt{\det g}^{\,-1}(\sqrt{\det g}\cdot g^{ij}u_j)_i + (4H^2 - 2K)u, \quad g := (g_{ij})$$

**定義 7.1.1.** 曲面上の関数 $f$ に対して, $\Delta f := \sqrt{\det g}^{\,-1}(\sqrt{\det g}\, g^{ij} f_j)_i$ と書く. 作用素 $\Delta$ を **Laplacian** とよぶ. ($\Delta$ の定義を, ここでの定義の符号を変えたものとする流儀もあるので, 注意が必要である. )

**命題 7.1.1.** 一般の曲面の変分ベクトル場 $V = u\nu$ について

$$H_\epsilon = \frac{1}{2}\Big[\Delta u + (4H^2 - 2K)u\Big].$$

**定理 7.1.1** (面積の第 **2** 変分公式)**.** 極小曲面 $X : \Sigma \to \mathbf{R}^3$ の変分 $X(\epsilon)$ に対して, その面積の第 2 変分は,

$$\frac{d^2}{d\epsilon^2}\Big|_{\epsilon=0} \mathrm{Area}(X(\epsilon)) = -\int_\Sigma (\Delta u - 2Ku)u\, d\Sigma, \quad u := \langle X_\epsilon, \nu\rangle|_{\epsilon=0}.$$

## 7.2 極小曲面の安定性

ここでは境界で $0$ になる変分ベクトル場のみを考える.

**定義 7.2.1.** コンパクトな極小曲面 $\Sigma$ は，任意の変分ベクトル場に対して面積の第 **2** 変分が $0$ 以上になるとき，安定 であるという．安定でないとき，不安定 であるという.

コンパクトでない極小曲面の場合は，その任意の有界部分が安定であるとき安定，そうでないとき不安定，という.

**定理 7.1.1** 極小曲面 $X : \Sigma \to \mathbf{R}^3$ の変分 $X(\epsilon)$ に対して,

$$\frac{d^2}{d\epsilon^2}\Big|_{\epsilon=0} \mathrm{Area}(X(\epsilon)) = -\int_\Sigma (\Delta\varphi - 2K\varphi)\varphi\, d\Sigma =: I(\varphi), \quad \varphi = \langle X_\epsilon, \nu\rangle|_{\epsilon=0}$$

固有値問題

$$(*) \qquad L[\varphi] = -\lambda\varphi, \qquad \varphi|_{\partial\Sigma} = 0, \qquad \varphi \in H_0^1(\Sigma) - \{0\}$$

$$L[\varphi] := \Delta\varphi - 2K\varphi$$

の固有値を $\lambda_1 < \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n \leq \cdots$ とする (と表せる). 次が成立.

$$\lambda_1 = I(\varphi_1) = \min\{I(p) \,|\, p \in C_0^\infty(\Sigma), \int_\Sigma p^2\, d\Sigma = 1\},$$

$$\lambda_i = I(\varphi_i) = \min\{I(p) \,|\, p \in C_0^\infty(\Sigma), \int_\Sigma p^2\, d\Sigma = 1,$$

$$\int_\Sigma p\varphi_j\, d\Sigma = 0 \ (j = 1, \cdots, i-1)\}$$

固有値問題

$$(*) \qquad L[\varphi] = -\lambda\varphi, \qquad \varphi|_{\partial\Sigma} = 0, \qquad \varphi \in H_0^1(\Sigma) - \{0\}$$

$$L[\varphi] := \Delta\varphi - 2K\varphi$$

の固有値を $\lambda_1 < \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n \leq \cdots$.

**Morse index of $X$**$:=\#\{j \mid \lambda_j < 0\}$

$= \dim\{$ 面積を減少させる変分ベクトル場全体の次元 $\}$

特に,

$$\text{極小曲面 } X \text{ が安定} \iff \lambda_1 \geq 0$$

問. $\lambda_j$ をどのようにして求める (評価する) か?

**定理 7.2.1.** 極小曲面 $\Sigma$ 上に $\Delta\psi - 2K\psi = 0$ なる正の関数 $\psi$ が存在すれば，$\Sigma$ は安定である．(より精密に，$\lambda_1 > 0$.)

*Proof.* $\Sigma$ 上の任意の関数 $u$ は $u = v\psi$ という形で書ける．$\operatorname{grad}(pq) = p\operatorname{grad} q + q\operatorname{grad} p$ から $|\operatorname{grad} u|^2 = v^2|\operatorname{grad}\psi|^2 + 2v\psi\,\langle\operatorname{grad} v, \operatorname{grad}\psi\rangle + \psi^2|\operatorname{grad} v|^2$. $v$ は境界上で $0$ だから，**Stokes** の定理を使って，

$$
\begin{aligned}
-\int_\Sigma v^2\psi\Delta\psi\,d\Sigma &= \int_\Sigma \big\langle \operatorname{grad}(v^2\psi), \operatorname{grad}\psi\big\rangle\,d\Sigma \\
&= \int_\Sigma \{v^2|\operatorname{grad}\psi|^2 + 2v\psi\,\langle\operatorname{grad} v, \operatorname{grad}\psi\rangle\}\,d\Sigma, \\
\int_\Sigma |\operatorname{grad} u|^2 + 2Ku^2\,d\Sigma &= \int_\Sigma \{v^2\psi(-\Delta\psi + 2K\psi) + \psi^2|\operatorname{grad} v|^2\}\,d\Sigma \\
&= \int_\Sigma \psi^2|\operatorname{grad} v|^2\,d\Sigma \geq 0. \quad \text{等号成立} \iff v \equiv \text{定数} \iff v \equiv 0
\end{aligned}
$$

$\square$

問 **7.2.1.** 平面が安定であることを示せ．ただし，上の定理を直接には用いないこと．

問 **7.2.2.** 極小曲面上の $\Delta\psi - 2K\psi = 0$ なる関数 $\psi$ で，内部で正，境界で $0$ のものが存在すれば，安定であることを示せ．

## 7.3 Gauss 写像の像と安定性

極小曲面の安定性を判定するためには，下の補題が有用である．$X$ を極小曲面とし，

$$L[\psi] = \Delta\psi - 2K\psi$$

とおく．

**補題 7.3.1.** 極小曲面 $X$ の **Gauss** 写像を $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ とする．$\mathbf{R}^3$ の定ベクトル $v$ に対し，$L[\langle \nu, v \rangle] = 0$ が成り立つ．特に，$v = E_j$ $(E_1 := (1,0,0)$, $E_2 := (0,1,0)$, $E_3 := (0,0,1))$ を考えることにより，

$$L[\langle \nu, E_j \rangle] = L[\nu_j] = 0, \qquad j = 1, 2, 3 \tag{2}$$

がわかる．また，$X$ の支持関数 $\sigma := \langle X, \nu \rangle$ に対して，$L[\sigma] = 0$.

*Proof.* $X$ の変分 $X(\epsilon)$ に対し，$2H_\epsilon = L[f]$, $(f := \langle X_\epsilon, \nu \rangle)$ であった (命題 **7.1.1**)．平行移動 $X(\epsilon) = X + \epsilon v$ によって平均曲率 $H$ は変化しないから，$\nu_v := \langle \nu, v \rangle$ は $L[\nu_v] = 0$ を満たす．また，相似変換 $X(\epsilon) = (1+\epsilon)X$ によって平均曲率 $H$ は $1/(1+\epsilon)$ 倍になるから，

$$L[\sigma] = 2H_\epsilon = 2(d/d\epsilon)|_{\epsilon=0}(1+\epsilon)^{-1}H = -2H = 0$$

□

**定理 7.3.1.** 極小曲面 $\Sigma$ の **Gauss** 写像を $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ と表す．$\nu$ の像がある開半球面に含まれれば，$\Sigma$ は安定．(より精密に，$\lambda_1 > 0$.)

*Proof.* 曲面を回転させて，**Gauss** 写像の像が北開半球面に含まれるようにする．すると $\nu_3$ は定理 **7.2.1** の条件を満たすから，$\lambda_1 > 0$. □

**系 7.3.1.** 平面は安定である．より一般に，平面の領域上の関数のグラフとして表される極小曲面は安定である．

**命題 7.3.1.** 極小曲面 $\Sigma$ の **Gauss** 写像を $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ と表す．$\nu$ の像が，ある半球面 $D_+$ と一致し，$\nu(\partial\Sigma) = \partial D_+$ ならば，$\lambda_1 = 0$．したがって，$\Sigma$ は安定である．

*Proof.* 曲面を回転させて $\nu$ の像が北開半球面に含まれるようにすると，内部で $\nu_3 > 0$，境界上で $\nu_3 = 0$．定理 **7.2.1** の証明と同様にして，$\lambda_1 = 0$．($\nu_3$ は $\lambda_1 = 0$ に属する固有関数．) □

半球面を少しでも広げると次のように不安定になってしまう．

**定理 7.3.2.** 極小曲面 $\Sigma$ の **Gauss** 写像の像が，ある閉半球面を真に含むならば，$\Sigma$ は不安定である．

*Proof.* 曲面を回転させて，**Gauss** 写像の像が北半球面 $D_+$ を含むようにする．$\Sigma_1 \subset \Sigma$ を，$\nu(\Sigma_1) = D_+$ となるようにとると，固有値の領域に対する単調性から $\lambda_1(\Sigma) < \lambda_1(\Sigma_1) = 0$．「極小曲面 $X$ が安定 $\Longleftrightarrow \lambda_1 \geq 0$」だったから，$\Sigma$ は不安定である． □

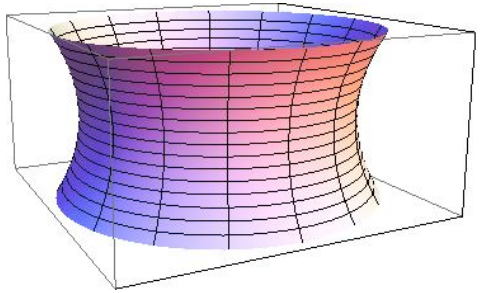
定理 **7.3.1** よりも一般に，次の定理が成立することはすでに紹介した．証明には解析的な議論が必要である．

**定理 7.3.3 (J. L. Barbosa-M. do Carmo, 1976).** 極小曲面 $X$ の **Gauss** 写像の像の面積が $2\pi$ よりも小さいならば，$X$ は安定である．

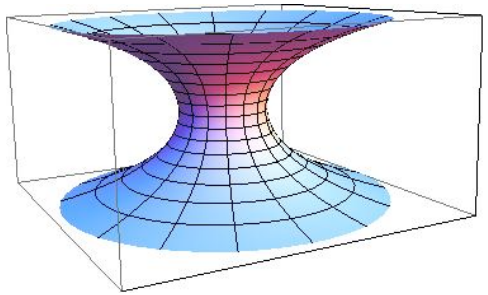
なお，次の結果が知られている．

**定理 7.3.4 (M. do Carmo-C. K. Peng, 1979).** $\mathbf{R}^3$ 内の完備で安定な極小曲面は平面のみである．

講義では，懸垂面の安定な部分領域を例として紹介する．なお，懸垂面全体は，**Morse** 指数 **1** である．



安定 (面積極小)



不安定 (面積極小ではない)

# 8　最大値原理と非存在定理への応用

## 8.1　極小曲面に対する最大値原理

次の定理も，しばしば活躍する.

**定理 8.1.1** (最大値原理). 2 つのグラフ

$$z = f_1(x, y), \quad z = f_2(x, y), \quad f_1 \geq f_2, \quad (x, y) \in \{x^2 + y^2 < 1\}$$

が極小曲面とする. $f_1(0, 0) = f_2(0, 0)$ ならば，$(0, 0)$ の近傍で $f_1 \equiv f_2$.

*Proof.* $F := f_2 - f_1$ に，楕円型偏微分方程式の解に対する最大値原理 (最大値を内部でとれば，定数) を適用する. □

## 8.2 極小曲面の非存在について

懸垂面 $S_a$ : $\sqrt{x^2+y^2} = \dfrac{a}{2}\left(e^{z/a}+e^{-z/a}\right)$, $(a>0)$
に接する円錐 (頂点は原点) は，適当な定数 $k>0$ を用いて

$$C_1 : z = k\sqrt{x^2+y^2},\ z \geq 0, \quad C_2 : z = -k\sqrt{x^2+y^2},\ z \leq 0$$

と書ける．各 $C_j$ で囲まれる開領域 (円錐 $C_j$ の内部) を $\Omega_j$ とする．

**定理 8.2.1** (極小曲面の非存在)**.** $\Gamma_1 \subset \Omega_1$, $\Gamma_2 \subset \Omega_2$ は単純閉曲線とすると，$\Gamma := \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ を張る連結なコンパクト極小曲面は存在しない．

*Proof.* 存在したとしてそれを $M$ とする．$S_a$ $(a>0)$ はすべて同じ円錐 $C_1$, $C_2$ に接する．$M \cap S_a \neq \emptyset$ なる $a$ の最大値 (存在する) を $a_0$ とする．この時，$M$ と $S_{a_0}$ はある点 $P$ で片側から接する．定理 **8.1.1** を繰り返し使うことにより $M \subset S_{a_0}$ となる．これは $\Gamma_j \subset \Omega_j$ に矛盾． □

# 9　おわりに

極小曲面は，18 世紀後半以来，現在に至るまで多くの数学者達を魅了し続けてきた．極小曲面は，その直感的イメージのつかみ易さだけから興味を持たれているのではない．極小曲面は，問題の自然さから現れるさまざまな著しい性質を持つ．また，変分問題の良い例であり，これらを研究する方法を開発することは，もっと一般の変分問題研究のための新しい理論の発見につながる．さらに，さまざまな数学上の応用や数学以外の学問への応用があり，建築に用いられるなど実用上の応用もある．こういったさまざまな理由により，極小曲面は，古典的な問題でありながら，現在もなお多くの数学者達によって活発に研究されている．近年は，コンピュータグラフィックスが，極小曲面の直感的な理解や，それらの持つ性質の予想を立てるのに役立っている．

さて，極小曲面の安定性についての議論では，曲面が向き付け可能であることを仮定した．メビウスの帯型極小曲面 (下図) のように，向き付け不可能な極小曲面は豊富に存在する．向き付け不可能な極小曲面の安定性についての研究は，今後の課題であろう．

$$\begin{cases} g(z) = \dfrac{z^4(z+1)}{z-1}, \\ f(z) = \dfrac{(z-1)^2 i}{z^6}. \end{cases}$$

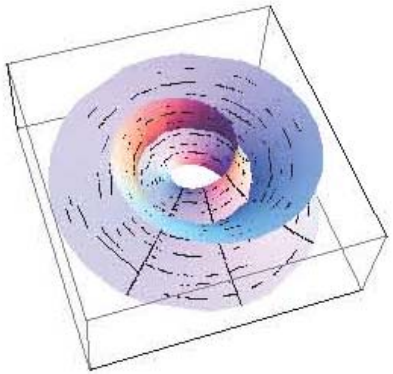


Figure: $c(M) = -10\pi$

$$\begin{cases} g(z) = \dfrac{z^2(z+1)}{z-1}, \\ f(z) = \dfrac{(z-1)^2 i}{z^4}. \end{cases}$$

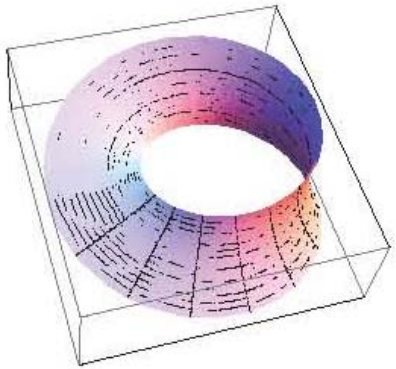


Figure: $c(M) = -6\pi$

極小曲面の研究において重要な手法の一つに幾何学的測度論と呼ばれるものがある．この方法は，特に，エネルギー最小化列の収束を示すのに力を発揮する．与えられた枠を張る極小曲面の存在証明を振り返ってみよう．考える曲面はすべて円板型と仮定していた．ところが実際は，$\mathbf{R}^3$ 内の単純閉曲線で張られる曲面の中で面積最小のものは円板型とは限らない．種数が高い曲面や向き付け不可能な曲面が面積最小となる場合がある．このように，曲面の位相型をあらかじめ固定するべきではない場合がある．そのようなときにも，幾何学的測度論が活躍する．([**5**] は幾何学的測度論の入門書．[**6**] は [**5**] の旧版の和訳．)

最後に，ドイツの建築家 **F.** オットーによる建築物の例をあげておこう．オットーは，建物の屋根をいくつかの「石鹸膜の形」を組み合わせた形に作った．例としては，**1967** 年のモントリオール万国博覧会でのドイツ・パビリオンや **1972** 年のミュンヘンオリンピックのスタジアムの屋根がある．[4] は，これらの屋根の写真を掲載しているが，それだけではなく，多くの写真や絵を用いて，主として自然界に見られる (何らかのエネルギーの) 最小値や極小値を与えるものたちの解説を行っており，大変楽しい本である．

# References


[1] **R. Courant, Dirichlet's Principle, Conformal Mapping, and Minimal Surfaces, Dover Publications, 2005. (1950** 年に **Springer-Verlag** から発刊されたものの復刻版．**)**

[2] **U.Dierkes, S. Hildebrandt, A. Küster, and O. Wohlrab, Minimal Surfaces I, II, Springer-Verlag, 1992.**

[3] 小磯憲史，変分問題，共立出版，**1998.**

[4] **S.Hildebrandt, A.Tromba** 著，小川泰 他 訳. 形の法則 —自然界の形とパターン—, 東京化学同人出版, **1994.**

[5] **F. Morgan, Geometric Measure Theory, Fourth Edition: A Beginner's Guide, Academic Press, 2008.**

[6] **F. Morgan** 著，儀我 美一 監訳，幾何学的測度論 —石けん膜の数理解析—，共立出版，**1997.**

[7] **R. Osseman, A Survey of Minimal Surfaces, Dover Publications, 1986.**

[8] **J. C. C. Nitsche, Vorlesungen über Minimalflächen, Springer-Verlag, 1975.**

[9] **J. C. C. Nitsche, Lectures on Minimal Surfaces I, Cambridge Univ. Press, 1989.**

[10] **A. Ros. Stable periodic constant mean curvature surfaces and mesoscopic phase separation. *Interfaces and Free Boundaries* 9 (2007), 355-365.**