第一回さきがけ数学塾「力学系」

力学系の大域的計算理論

北海道大学 創成科学共同研究機構
荒井迅 (Zin ARAI)
arai@cris.hokudai.ac.jp
http://www.cris.hokudai.ac.jp/arai/

1 はじめに

力学系の大域的計算理論とは，いったい何を意味するのだろうか．明確な定義を念頭に言っている訳ではないので実は私も正直よくわからないのだが，とりあえず

力学系の不変集合全体の構造を何らかのモデルで表現するための計算理論

であるとここでは述べておく．

以下ではまず § 2.1 で Lorenz 方程式を題材として，計算機がどのように力学系の大域的な理解に用いられているのかを見る．精度保証付き数値計算の話題にも触れる．

§ 3 では具体的な力学系の情報を離散化して計算機上で表現するための一般的な方法について解説する．

§ 4 では代数的位相幾何学を用いて力学系を解析するための枠組みであるコンレイ指数についての解説を行なう．前節で展開された離散化の手法を応用すると，コンレイ指数は計算機で計算することができ，非常に強力なツールとなる．

次に § 5 では，力学系の構造安定性を計算機を用いて証明するためのアルゴリズムとその応用について解説する．構造安定性定理によれば，一様双曲性を示すことが構造安定性の核心であったのだが，ここで紹介するアルゴリズムの鍵は，擬双曲性という弱い双曲性を経由することで一様双曲性の証明の困難を回避することである．

最後に § 6 において，これらの研究に有用な幾つかのソフトウェアパッケージを紹介する．

2　力学系を大域的に表現するモデル

2.1　Lorenz 方程式

気象学者の E. Lorenz は，熱対流現象を記述するある偏微分方程式を大胆に単純化して次のような $\mathbb{R}^3$ の常微分方程式を導いた．

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= -\sigma x + \sigma y \\
\dot{y} &= \rho x - y - xz \\
\dot{z} &= -\beta z + xy
\end{aligned}
$$

これが Lorenz 方程式と呼ばれる方程式である．ここで σ, ρ, β は実数値を取るパラメータであり，Lorenz は $(\sigma, \rho, \beta) = (10, 28, 8/3)$ とおいた数値実験を 1963 年に行ない，いわゆるストレンジアトラクターを発見した（図 1）．

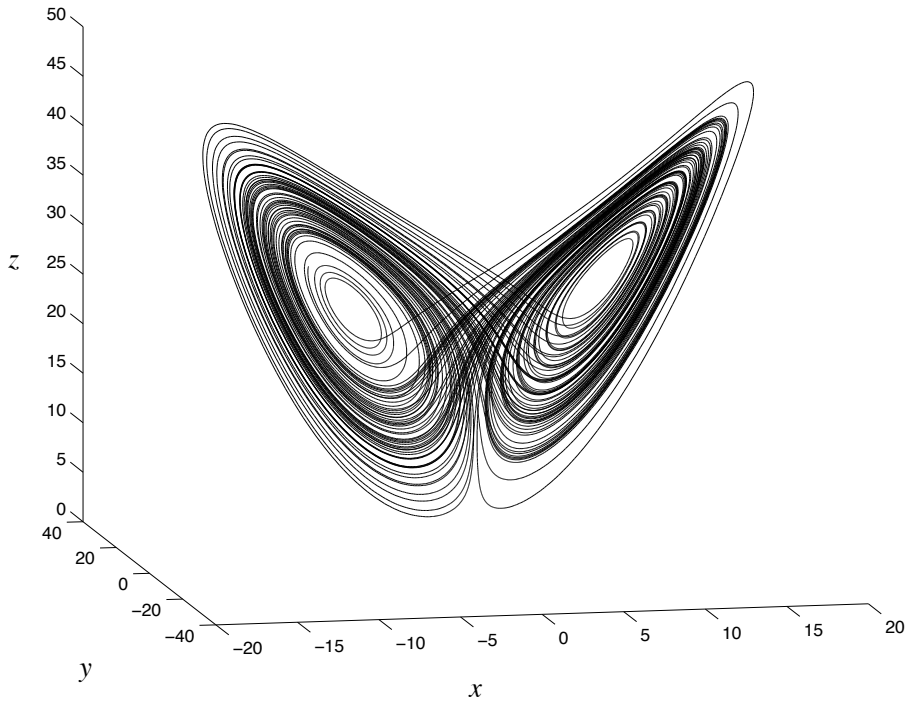


図 1　Lorenz 方程式のアトラクター

気象学者である彼はこの結果から天気の長期予測が原理的に不可能であると結論したが，彼の議論は数値的に描かれた軌道に基く観察であり，数学的には **Lorenz 方程式が**

与える力学系は本当にカオス的なのであろうかという疑問が生じる．この問題の重要性は Hilbert の 23 問題に習い S. Smale が 21 世紀の数学者のために作成した 18 の未解決問題集の第 14 番目が「Lorenz 方程式は本当にストレンジアトラクターを持つのだろうか」という問いであったことにも示されている．

この問題に対して J. Guckenheimer が示した方針が，やみくもに方程式自身を調べるのではなく，まず Lorenz 方程式が持つと考えられる力学系を抽象化した「幾何学的モデル」の性質を研究し，次に Lorenz 方程式が実際に幾何学モデルと同じ構造を持つことを示そうというものである．

多くの数学者がこの疑問に答えようと努力を続け，幾何学的モデルの性質については良く理解が進んだが，実際に Lorenz 方程式が幾何学的モデルを持つことの証明が W. Tucker 得られたのはごく最近のことで，その証明は計算機を援用したものであった．

定理 1 (Tucker [21])**.** 古典的パラメータ $(\sigma, \rho, \beta) = (10, 28, 8/3)$ において *Lorenz* 方程式は *"robust strange attractor"* を持つ．

彼が証明したのはまさに Lorenz 方程式が幾何学的モデルをほぼそのままの形で持つことであった．この結果は Lorenz 方程式に関して非常に良い理解を与えるが，用いられる幾何学的モデルは方程式の構造に密接に関係したものであり，そのままでは他の方程式には用いることができない．より適用範囲の広いモデルとしては，記号力学系のように幾何的な構造を無視して抽象化したものの方が扱いやすいので，以下ではこれを主に考える．

まず記号力学系の定義を思い出そう．自然数 k に対し

$$\Sigma_k := \prod_{i=0}^{\infty} \{1, 2, \ldots, k\}$$

を k 個の片側無限記号列からなる空間とし，その上のシフト写像 $s : \Sigma_k \to \Sigma_k$ を $s(x_0, x_1, \ldots) = (x_1, x_2, \ldots)$ で定義する．また $k \times k$ 整数行列 $A = (a_{ij})$ に対し，$\Sigma_A := \{(s_n) \in \Sigma_k \mid a_{s_n s_{n+1}} \neq 0\}$ とおく．$s(\Sigma_A) = \Sigma_A$ に注意.

また写像 $f : X \to X$ と集合 $N \subset X$ に対し，その最大不変集合を

$$\mathrm{Inv}(N, f) := \{x \in N \mid \text{任意の } n \in \mathbb{Z} \text{ に対し } f^n(x) \in N\}$$

と定義する．

定理 2 (Mishaikow-Mrozek[15, 16, 17])**.** *Lorenz* 方程式のパラメータ (σ, ρ, β) が十分 $(10, 28, 8/3)$ に近ければ ポアンカレ切断 $I \subset \{z = 27\}$ とその上のポアンカレ写像 P が *well-defined* となる．さらに $\pi : \mathrm{Inv}(I, P) \to \Sigma_6$ が定義され連続となり，$\pi \circ P = s \circ \pi$

および $\Sigma_A \subset \pi(\mathrm{Inv}(I,P))$ が成り立つ．ただし A は

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

で与えられる行列である．

定理 3 (Galias-Zgliczyński[12])**.** *Lorenz* 方程式のパラメータ (σ, ρ, β) が十分 $(10, 28, 8/3)$ に近ければポアンカレ切断 $I \subset \{z = 27\}$ とその上のポアンカレ写像 P が *well-defined* となり，さらに連続写像 $\pi : \mathrm{Inv}(I, P^2) \to \Sigma_2$ が定義され $\pi \circ P^2 = s \circ \pi$ が成立し，π は全射となる．

おおまかに言うと，上の二つの定理は Lorenz 方程式のアトラクターの中に記号力学系で記述できるカオス的な不変集合が取れるということを主張している．

Tucker の結果は Mischaikow-Mrozek や Galias-Zgliczyński の結果よりも大域的であり，アトラクター全体の構造についてのより深い結果であることだけ注意しておく．この違いはどこから来るかと言うと，特異点の取り扱いである．ベクトル場の特異点の近くを通る軌道を精度保証付きで数値積分すると，速度が 0 に近づくために特異点の近傍を抜けるまでに必要な数値積分のステップ数が莫大になり，よい精度が得られない．そこで Mischaikow-Mrozek や Galias-Zgliczyński は原点にある特異点の周りはあきらめて，軌道が原点の近くを通らないような部分集合にのみに注目した．一方で Tucker は原点の近傍の外ではやはり精度保証付きの数値計算をするのだが，原点の近傍では Normal Form を用いて解析的に取り扱い，それらを上手く組み合わせることでアトラクター全体の解析に成功した．

どちらの結果においても証明は

1. 軌道を厳密に数値積分する（Tucker の場合は Normal Form も用いる）ことによって Poincaré 写像を求める
2. 得られた Poincaré 写像を解析することでカオスの存在を示す

という 2 つのステップに分かれる．すなわち，常微分方程式の研究を数値積分などにより写像の研究に帰着させるという方針である．写像の解析に関しては次節以降で扱うので，この節の残りでは数値積分に関わることについて触れよう．

2.2 数値積分の誤差をどう抑えるか

常微分方程式を数値的に積分してポアンカレ写像を求める時に生じると考えられる問題を大きくまとめると次のようになる．

- ベクトル場を積分する際に用いる近似法が含む誤差
- ポアンカレ断面との交わりを求めるときの誤差
- 数値計算によって生じる丸め誤差

それぞれについて簡単に触れてみよう．

まず数値積分に用いる近似法であるが，Tucker は Euler 法，Galias-Zgliczyński は 4 階の Taylor 展開，Mischaikow-Mrozek は 4 階の Runge-Kutta 法を用いている．普通の数値積分ならば 4 階の Runge-Kutta 法が最適な解に思われるが，精度保証をする場合には一概にそうとは言えない．通常の数値積分と異なり，精度保証をする場合には誤差項の厳密な評価も必要になるからである．実際 Galias-Zgliczyński は研究の初期段階において 4 階の Runge-Kutta を用いて積分を行なっていたが，誤差項の項数が増えすぎて計算時間が増大してしまったために，誤差項の評価が簡単な 4 階の Taylor 展開に乗り替えている．

今求めたいのはポアンカレ断面からそれ自身への写像であるが，数値積分法による離散近似を続けていくと，正確にポアンカレ断面に戻って来ず，一般には飛び越えてしまう．よってベクトル場の Taylor 展開などを用いて軌道とポアンカレ断面との交わりを求めることになるが，やはりここでも誤差を正確に評価しなくてはならない．

最後の丸め誤差については，次に示すように精度保証付きの厳密な区間演算を用いることで評価できる．

2.3 区間演算

$\mathbb{F}$ を浮動小数点の集合とし $\mathcal{I} := \{I = [a, b] \subset \mathbb{R} : a, b \in \mathbb{F}\}$ とおく．$\mathcal{I}$ は計算機上で表現される区間の集合である．

計算機による数値計算は厳密な値を返さないが，次のように「厳密な値の外側からの評価」はできる．

定義 4．精度保証付き区間演算とは区間 $I, J \in \mathcal{I}$ に対し，

$$\{x \odot y \mid x \in I,\ y \in J\} \subset K$$

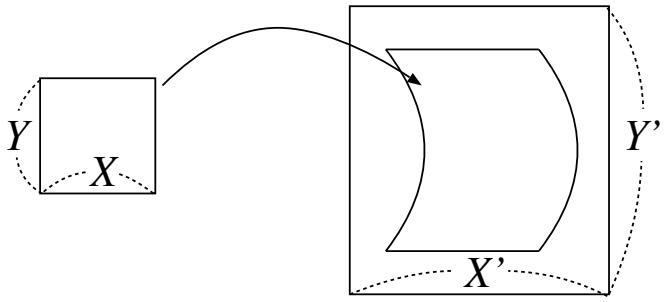
が数学的に成立する $K \in \mathcal{I}$ を返す演算である．ただしここで $\odot$ は四則演算 $(+, -, *, /)$ のどれかを表す．

CPU の浮動小数点演算の統一規格として IEEE754 規格というものがあるが，これを満たす CPU ならば必ず精度保証付き区間演算を実行できる．現在一般に流通している汎用の CPU はほぼ全てこの規格を満たす．

区間演算を用いると，正確には計算できない対象であっても，外側から厳密な評価を与えることができる．例えば $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を連続写像としよう．区間 $X, Y \in \mathcal{I}$ により張られる直方体 $X \times Y \subset \mathbb{R}^2$ を考える．丸め誤差の影響により $f(X \times Y)$ を正確に求めることは不可能だが，区間演算を用いて

$$f(X \times Y) \subset \mathrm{int}(X' \times Y')$$

が成立するような $X', Y' \in \mathcal{I}$ を求めることができる (下図)．



ある点の軌道を正確に計算することはできないが，「その軌道はこの範囲に必ず入ります」ということは保証できるのである．

同様に連続な力学系に対しても，軌道の数値積分において区間演算を用いれば，丸め誤差の影響は厳密に評価できる．ただしここで区間演算によって別の問題が生じる．それが “wrapping effect” である．

2.4 Wrapping Effect

区間演算は基本的に一次元の区間に対する演算なので，高次元の常微分方程式を積分をする場合には各座標に対して区間演算を用いることになる．従って一点もしくは区間の直積を積分した像として得られる集合は，やはり区間の直積として表わされることになる．

ここで図 2 における左側の正方形 X を考え，常微分方程式によってこの正方形を積分した像が右の X' のように細長く斜めの図形になったとする．すると実際には面積が強

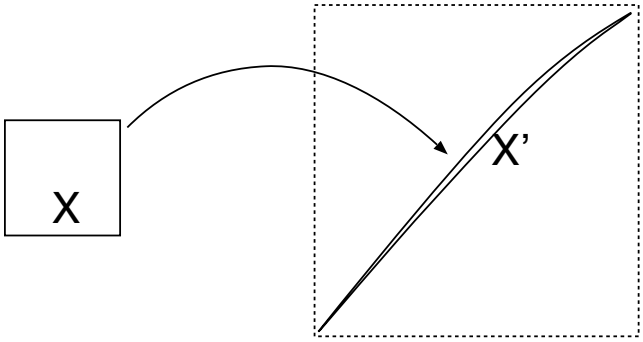


図 2　wrapping effect

く縮小しているのにもかかわらず X' を覆う区間の直積は図の点線で描かれた正方形のように大きなものになってしまい，計算結果は精度の悪いものになってしまう．これが wrapping effect と呼ばれる現象であり，とくに Lorenz 方程式のように強い拡大方向と縮小方向を持っている場合には深刻な問題となる．

この wrapping effect を抑えるために Tucker が採った方法は，定義域となる領域 X を小さく分割し直すことで歪みを抑えることである．分割の要素となる各領域はやはり wrapping effect の影響を受けるが，それぞれの像の和集合を取ると全体としては像の拡大は抑えられる．

また Galias-Zgliczyński は積分を区間の直積に対してではなく一点に対して行なうことで wrapping effect を抑えている．すなわち点 x を中心とする半径 ϵ の球体 $B(x,\epsilon)$ を時間 h だけ積分した像を求めるために，まず x の軌道を時間 h だけ積分してその像 P を求める．ここで P は区間の直積となる．その後，logarithmic norm を用いた微分の評価を用いて領域 P を少し膨らませた領域を P' とすると，求めたい $B(x,\epsilon)$ の像は P' に含まれているということが示される．

Mischaikow-Mrozek が wrapping effect を抑えるために用いたのはポアンカレ断面を一つではなく沢山取るという方法である．すなわち，$\{z = 27\}$ という断面を出た軌道がアトラクターの中を一周して帰ってくる，その道筋に数多くの断面を取って（パラメータにもよるが，何十個も取っている）おき，それぞれの断面の間のポアンカレ写像を求める．最終的に欲しい $\{z = 27\}$ の上のポアンカレ写像は，そうして求めたポアンカレ写像たちの合成となる．こうすると各断面の間の数値積分は短かい時間に抑えられ，各断面を上手く取れば wrapping effect の効果を抑えられる．

各ステップで座標を取り直すことで wrapping effect を抑えるという方法も考えられ

る．例えば図 2 の場合であれば，(x, y) という座標から $(x+y, x-y)$ という座標に変換すれば X' を小さな面積で包み込めることがわかる．このような座標の取り直しを効果的に行なう Lohner アルゴリズム（[23] など参照）と呼ばれるアルゴリズムが知られている．

3 グラフを用いた力学系の離散化

この節では相空間 X は R^n の有界な方体（区間の直積）とする．力学系の情報を離散化するため，まず X を等しい大きさの n 次元方体たちにより分割する．分割の要素である方体たちの集合を Ω と書く．分割の要素となる n 次元方体の各辺の長さを d_i $(i = 1 \ldots n)$ とすれば，

$$\Omega := \left\{ \prod_{i=1}^{n} [k_i d_i, (k_i + 1) d_i] : k_i \in \mathbb{Z} \right\}$$

である．また方体の集合 $\mathcal{B} \subset \Omega$ に対し，$\mathcal{B}$ に含まれる方体の和集合を $|\mathcal{B}|$ と書く．

次にこの分割を用いて f を表現する．各方体 $\omega \in \Omega$ に対してその像 $f(|\omega|)$ を知りたいのだが，丸め誤差などにより計算機では像を正確に求めることができない．そこで各 $\omega \in \Omega$ に対して

$$f(|\omega|) \subset \operatorname{int} F(\omega)$$

が厳密に成立する方体 $F(\omega) \subset X$ を精度保証付き数値計算で求める（図 3）．多くの場合において，§ 6 で触れる CAPD 等の精度保証付き区間演算ライブラリを用いれば十分である．$\widetilde{f}(|\omega|)$ は方体ではあるが Ω の要素の和ではないので，さらに $\widetilde{f}(|\omega|)$ と交わる Ω の要素を全て集めこれを $\mathcal{F}(\omega)$ とおく（図 4）．すなわち多価写像 $\mathcal{F} : \Omega \multimap \Omega$ を

$$\mathcal{F}(\omega) = \{\omega' \in \Omega : \widetilde{f}(|\omega|) \cap |\omega'| \neq \emptyset\}$$

で定義する．仮定より $f(|\omega|) \subset \operatorname{int} \mathcal{F}(\omega)$ である．

最後に有向グラフ G を，頂点の集合が Ω であり，$\omega' \in \mathcal{F}(\omega)$ のときに ω から ω' への辺が存在するとして定義する（図 4）．これは $f : |\mathcal{B}| \to |\mathcal{B}|$ の計算機による近似表現と考えることができる．近似とは言っても，精度保証がなされていることから，f の全ての軌道に対して，それに対応する G の道が存在する．特に次の主張は有用である．

命題 5. f が $|\mathcal{B}|$ 内に k 周期点を持つならば G は必ず長さが k の約数であるようなサイクルを持つ．

ここで k サイクルとは有向グラフの閉路で長さが k のものを指す（§4.7 も参照のこと）．

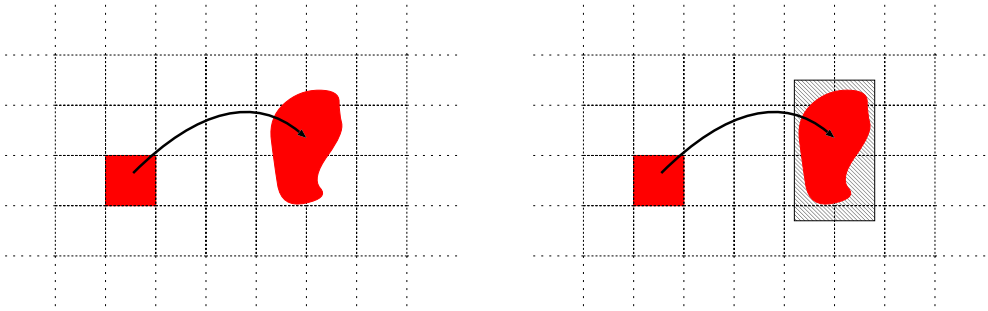


図 3　左: 方体 $|\omega|$ とその像 $f(|\omega|)$，右: 区間演算による $f(|\omega|)$ の被覆 $F(\omega)$

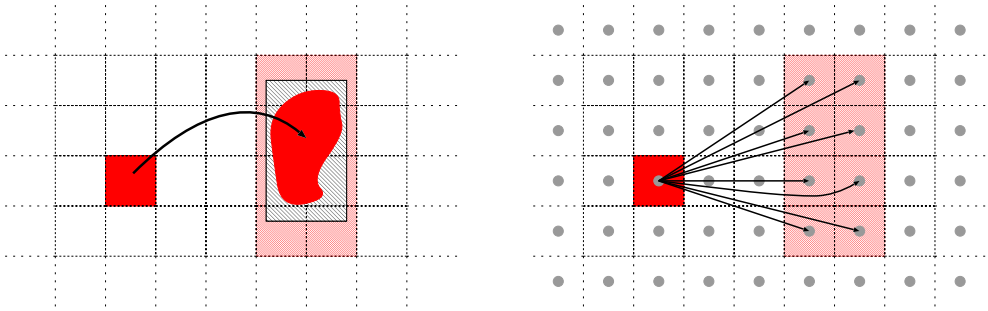


図 4　左: $F(\omega)$ と交わる Ω の元の集合 $\mathcal{F}(\omega)$，右: G の頂点 ω から出る辺

さらに，このグラフは力学系のより重要な不変集合を表現することもできる．

定義 6. x から y への長さ n の ε-鎖とは点列 $\{x = x_0, \ldots, x_n = y\}$ であって任意の $1 \leq j \leq n$ に対して $d(f(x_{j-1}), x_j) < \varepsilon$ となるものである．これを用いて f の鎖回帰集合を

$$\mathcal{R}(f) := \{x \in X \mid \text{任意の}\varepsilon > 0 \text{ に対し } x \text{ から } x \text{ への } \varepsilon\text{-鎖が存在する}\}$$

と定義する．ここで d は X の位相を与える距離である．

鎖回帰集合はその中に全ての周期点や非遊走集合を含み，コンレイの力学系の基本定理 [19] によれば鎖回帰集合の外では力学系の振舞いは単純な勾配系になることがわかる非常に重要な不変集合である．

これらの不変集合を表現するため，有向グラフ G に対し次のような部分グラフを定義する．

$$\operatorname{Inv} G := \{\omega \in G \mid \exists \text{ bi-infinitely long path through } \omega\}$$
$$\operatorname{Scc} G := \{\omega \in G \mid \exists \text{ path from } \omega \text{ to itself}\}$$

また G' を G の部分グラフとするとき，G' 含まれる頂点に対応する直方体を集めて

$|G'| := \bigcup_{\omega \in G'} |\omega|$ とおく．すると次の性質が成立することが証明される．

命題 7. $\mathcal{R}(f) \subset |\operatorname{Scc} G|$, $\operatorname{Inv}(X, f) \subset |\operatorname{Inv} G|$.

集合 $\mathcal{R}(f)$ や $\operatorname{Inv}(X, f)$ は典型的にはフラクタル構造を持つような複雑な集合で，計算機で正確な形を計算することは到底できないのだが，その外側からの近似ならばこの方法で得ることができるのである．計算に用いる方体をより細かいものに取り替えれば，より良い近似が得られるが，この近似が原理的に収束するとは限らず，それは「計算可能性理論」の問題となる．

グラフで表現することによりグラフ理論の高速なアルゴリズムを適用できるのがこの方法の一つの利点である．このようなデータ構造を扱うには M. Dellnitz や O. Junge らによって開発された力学系研究のための汎用パッケージである GAIO [8, 9] を用いると便利である．

4 コンレイ指数と計算ホモロジー理論

4.1 はじめに

本稿では計算ホモロジー理論を用いた力学系の研究手法について解説する．力学系とホモロジーは，その現代的な意味での創始者が Henri Poincaré であるという共通点がある．エントロピー予想やアーノルド予想など，力学系の重要な問題がホモロジーの言葉を用いて表現されることも多い．しかし，応用の立場からはこの二つの分野の関連が強く意識されることはあまりなかった．一つの原因は，ホモロジーが持つ情報が本質的に大域的なものであるため，ホモロジーにより何かを示せても，それが相空間のどこで起きているのかわからないという点であろう．また，ホモロジーを計算機で求める方法がなかった事も理由と考えられる．これらの問題を解決するのが本稿で解説するコンレイ指数理論 [18] であり，計算ホモロジー理論 [13] である．

4.2 ホモロジーと力学系

コンレイ指数を考える前に，より直接的なホモロジー理論の力学系への応用を思い出そう．空間 X 上の写像 $f : X \to X$ で与えられる離散力学系を考える．

4.2.1 不動点定理

不動点の存在を保証する定理を一般に不動点定理と呼ぶが，数ある不動点定理のなかで基本的かつ応用範囲の広いものとして Lefschetz-Hopf の不動点定理がある．簡単のため，ここでは有限多面体上の写像で考える．またホモロジー群の係数は適当な体とし，以下では明示しない．

Lefschetz-Hopf の不動点定理． $f : P \to P$ を有限多面体 P 上の連続写像とする．このとき $f_* : H_*(P) \to H_*(P)$ の *Lefschetz* 数が 0 でないならば，f は不動点を少なくとも 1 つ持つ．

ここで Lefschetz 数とは次のように定義される数である．

定義 8. 次数付きベクトル空間 $E = \{E_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ の自己準同型 $L = \{L_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ に対し，その Lefschetz 数を

$$\lambda(L) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n \operatorname{tr}(L_n)$$

と定義する．ここで $\operatorname{tr}(L_n)$ は線型写像 $L_n : E_n \to E_n$ のトレースを表す．

単なる和ではなく交代和を取るのは，それにより次の重要な性質が得られるからである．

命題 9. 鎖複体 $C = \{C_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 上の鎖写像 L がホモロジー群上に誘導する $H_*(L) : H_*(C) \to H_*(C)$ に対し，$\lambda(L) = \lambda(H_*(L))$ が成立する．

L と $H(L)$ はそもそも定義される空間からして異なるのだが，それにも関わらずトレースの交代和は等しくなるのである．

Lefschetz-Hopf の不動点定理の証明のあらすじ． 不動点がないと仮定する．P はコンパクトなので，ある $\delta > 0$ が存在して任意の $x \in P$ は f により距離 δ 以上は移動するとしてよい．必要ならば重心細分をとることにより，P の各単体の直径を $\delta/2$ よりも小さくしておく．ここで単体近似定理を使うと，P の細分 P' と単体写像 $g : P' \to P$ で，$f : P \to P$ の単体近似となっているものが得られる．いま $\alpha : C(P) \to C(P')$ をホモロジー群の同型 $\alpha_* : H_*(P) \to H_*(P')$ を誘導する鎖写像とすると，

$$\begin{tikzcd} C(P) \arrow[r, "g\circ\alpha"] \arrow[d, "\alpha"'] & C(P) \\ C(P') \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

という図式が得られ，定義により $f_* = (g \circ \alpha)_*$ である．よって仮定より $\lambda((g \circ \alpha)_*) \neq 0$ となり，命題 9 より $g \circ \alpha : C(P) \to C(P)$ の Lefschetz 数も 0 ではない．従ってある P の単体が存在して $g \circ \alpha$ により自分自身に移るが，これは δ の取り方に矛盾する． □

この証明は Hopf によるものである．元々の Lefschetz の証明は，直積集合 $P \times P$ の中で f のグラフ $\{(x, f(x)) \mid x \in P\}$ と対角線 $\{(x, x) \mid x \in P\}$ の交点を向きつきで数え挙げるという方法をとる．Lefschetz の方法が静的かつ幾何学的なものであるのに対し，Hopf による証明はより動的，力学系的であると言えよう．

証明中で $g \circ \alpha$ が果たす役割は f の離散化とも言えるものであり，計算ホモロジー理論の力学系への応用における典型的な考えかたの起源がここにある．ポイントは

- 十分に細かい細分を取ることにより，f の欲しい情報が f から誘導される鎖写像の代数的な性質として現われる
- 鎖写像の性質がホモロジーを取った後の f_* にも残っているので，f_* の代数的な性質を知ると元の f についての情報が得られる

という 2 点である．さらに，f_* はホモトピー不変なので f についてのおおまかな情報だけで計算できるという点も応用の観点からは重要である．f が扱いにくい写像であっても，f とホモトープな g で簡単な写像を見つけることができれば，$f_* = g_*$ なので計算は g で行なってよいことになる．

後の節におけるコンレイ指数と計算ホモロジーを用いた議論も，単体近似とグリッドによる方体近似の違いはあるものの，基本的な考え方は同じである．

4.2.2 エントロピー不等式

位相的エントロピーは，力学系の軌道の多様さを計る重要な不変量であり，位相的エントロピーが大きいほど系はカオス的であると言える．ここで「不変量」の意味をはっきりさせるためには，次の概念が必要である．

定義 10. 力学系 $f : X \to X$ と $g : Y \to Y$ に対し，全射な連続写像 $h : X \to Y$ が存在して $g \circ h = h \circ f$ を満たすとき，f から g へ**位相半共役**があるという．さらに h が位相同型写像になるときは，f と g は**位相共役**であるという．

f と g が位相共役のときは，h により 2 つの力学系を同一視できる．また半共役は，g の各軌道に対して f はその軌道と対応する軌道を少なくとも 1 つは持つ，すなわち f の軌道は g よりは多様であるということを意味する．

力学系に対して決まる量は，位相共役な系に対して常に同じ値をとるとき，**位相不変量**であると言う．例えば周期点の数は最も基本的な位相不変量である．

紙面の都合から位相的エントロピーの定義は述べられないが，次のような性質を持つ．

命題 11. コンパクト距離空間 X 上の連続写像 $f : X \to X$ に対し，位相的エントロピー $h_{\mathsf{top}}(f) \in [0, \infty]$ が定義され，以下をみたす．

(1) f が可微分写像ならば $h_{\mathsf{top}}(f) < \infty$.

(2) $k \geq 1$ に対し $h_{\mathsf{top}}(f^k) = k \cdot h_{\mathsf{top}}(f)$．また f が同相写像ならば $h_{\mathsf{top}}(f^{-1}) = h_{\mathsf{top}}(f)$.

(3) 位相的エントロピーは位相不変量である．すなわち，f と g が位相共役のとき

$$h_{\mathsf{top}}(f) = h_{\mathsf{top}}(g).$$

(4) f から g へが位相半共役があるとき

$$h_{\mathsf{top}}(f) \geq h_{\mathsf{top}}(g).$$

位相的エントロピーは有限個の軌道を追いかけるだけでは求められず，また摂動に対して不連続に変化することがあるため，数値計算でその値を評価することは難しい．そこでホモロジーの持つ代数的な情報が役に立つ．

定理 12 (Yomdin [22])**.** 可微分多様体 M 上の C^∞ 微分写像 $f : M \to M$ に対し

$$h_{\mathsf{top}}(f) \geq \log s(f_*).$$

ただし $s(f_*)$ は $f_* : H_*(M, \mathbb{R}) \to H_*(M, \mathbb{R})$ のスペクトル半径とする．

定理より，ホモロジー群上に誘導された線型写像が正のスペクトル半径を持てば，力学系はカオス的であると言える．ただし，この定理はホモロジーが自明な空間では役に立たない．例えば $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ に対しては $\mathbb{R}^n$ が可縮なため常に常に $\log s(f_*) = 0$ となる．この問題の解決のためには以下に解説するコンレイ指数理論が必要である．なお，この不等式は M. Shub が 1970 年代に C^1 級の可微分写像に対して成立すると予想したもので，この元々の形の「エントロピー予想」はいまだ未解決である．

4.3 コンレイ指数

前節の定理の主張は，どれも相空間全体に関わるものであった．不動点定理は空間のどこかに不動点があることを主張し，エントロピー不等式も，空間全体を見たらカオス的で

あると主張するのであって，カオス的な不変集合の位置についての情報を与えるものではない．これはホモロジー群，もっと大きく言えばトポロジーという考え方の本質に関わる問題である．ホモロジー群の生成元は空間の中で連続的に変形しても同じ元を表すことに注意しよう．ホモロジーで考えるときは点（0 次元ホモロジー群の生成元）や線（1 次元ホモロジー群の生成元）の位置は気にしないのである．このように，位相幾何学は物事をある意味おおらかにしか見ないことにより座標にしばられていては見えてこなかった空間の本質的な構造を見い出すことに成功した．しかしこの性質は力学系の解析に役立てようとする場合には少々問題である．前節で見た不動点定理は相空間のどこかに不動点が存在することを主張するが，数理モデルの解析において「不動点がどこかにある」とわかっても，それがどのような意味を持つ点であるかわからなれば，現象について理解が深まったとは言えないであろう．このような観点から，局所と大域を繋ぐ理論が必要となる．本稿でこの役目を果すのがコンレイ指数である．

力学系 $f : X \to X$ に対して，X 全体における f の挙動を考えるのではなく，ひとまず不変集合上での f のふるまいと，不変集合たちの間の軌道の繋がり方に問題を分割して考えてみよう．力学系の局所と大域の関係を考えるとき，指導原理とも言えるのが「コンレイの力学系の基本定理」[19, §10.1] である．これは $f : X \to X$ のカオス的な軌道は全て鎖回帰集合 $\mathcal{R}(f) \subset X$ に含まれ，$\mathcal{R}(f)$ の外側では軌道の振舞いは勾配流のようにおとなしい，ということを主張する定理である．ここで鎖回帰集合とは周期軌道や非遊走点を全て含むある閉不変集合であるが，さらに鎖成分と呼ばれる不変部分集合への分解を持つ．各鎖成分を一点に潰してしまえば，残りの部分はまさにモース理論的な状況になっているであろうというのが基本定理の思想である．

基本定理により鎖回帰集合の外の力学系は単純な構造をしているので，これらの鎖成分の全てを解析でれば，力学系の振舞いを理解したと言える．ところが，鎖成分そのものを対象として解析を行なうのは一般に難しい．それぞれの鎖成分は有限の大きさを持った閉不変集合であるが，それらが無限個連なって無限に微細な構造を構成していたり，また摂動により一度に無限個が消えてしまったりする．計算誤差により不変集合の構造が変化してしまう可能性を考えると，数学的に厳密な結果を数値計算から得るのは難しい．

まず我々は次のような「よい」不変集合のクラスを考える．これはモース理論での特異点に対応するような役割を以下で果たすことになる．

定義 13. $S \subset X$ が**孤立不変集合**であるとは，S のコンパクト近傍 N が存在して S が N の最大不変集合となる，すなわち

$$S = \mathrm{Inv}(N, f) \subset \mathrm{int}\, N$$

となることである（$\mathrm{int}\, N$ は N の内点集合）．このとき N を S の**孤立化近傍**という．

コンパクト集合 N はその最大不変集合 $\mathrm{Inv}(N, f)$ が N の内点集合（$\mathrm{int}\, N$ と書く）に含まれるとき $\mathrm{Inv}(N, f)$ の孤立化近傍であると定義しても同じである．空集合も孤立不変集合の定義を満たすことに注意する．重要なのは孤立化近傍であるという性質が微細な摂動に対し安定である，つまり N がある f に対し孤立化近傍であれば，f と十分近い g に対しても N は孤立化近傍であり続けるということである．$\mathrm{Inv}(N, f)$ と $\mathrm{Inv}(N, g)$ の構造は一般に異なるが，N が孤立化近傍であるという性質は安定であり，それは計算機で検証することが可能である．

このことから以下では孤立不変集合とその孤立化近傍に注目する．知りたいのはあくまで不変集合であるが，それは扱いが難しいのでまず大雑把にその近傍を観察し，そこで得られた情報から不変集合について何らかの結論を得ようという方針である．

では具体的な力学系が与えられたときに孤立化近傍をどのようにして構成すればよいのか，また孤立化近傍からどのような情報を得ればそこに含まれる孤立不変集合上の力学系について理解できるのか．

定義 14. 孤立不変集合 S の *index pair* とは $P_0 \subset P_1$ なるコンパクト集合対 $P = (P_1, P_0)$ で

(1) $P_1 \setminus P_0$ の閉包が S の孤立化近傍
(2) $f(P_0) \cap P_1 \subset P_0$
(3) $f(P_1 \setminus P_0) \subset P_1$

となるもののことである．このとき P_1/P_0 を P_1 の中で P_0 を一点に潰した空間（P_0 を潰して得られた点を $[P_0] \in P_1/P_0$ と書く），$f_P : P_1/P_0 \to P_1/P_0$ を

$$f_P([x]) := \begin{cases} [f(x)] & f(x) \in P_1 \text{ のとき} \\ [P_0] & \text{その他} \end{cases}$$

と定義すると f_P は連続写像となる．これを *index map* と言う．

f_P は S の近傍にのみ着目して構成した新しい力学系であり，ここから何らかの情報を引き出したい．そこでホモロジー理論を用いてみよう．（応用上は index pair として性質の良い空間しか扱わないのでホモロジー理論の違いは気にしなくてよい）すると空間 P_1/P_0 から加群 $H_*(P_1/P_0, [P_0])$ が，写像 f_P から自己準同型これにホモロジーを適用して得られる

$$f_{P*} : H_*(P_1/P_0, [P_0]) \to H_*(P_1/P_0, [P_0])$$

ここで $H_*(P_1/P_0,[P_0])$ は位相空間対 $(P_1/P_0,[P_0])$ の双対ホモロジーを表わす．本稿で扱うような性質のよい空間の場合ならば $H_*(P_1/P_0,[P_0]) \cong H_*(P_1,P_0)$ となる．また $H_*(P_1/P_0,[P_0])$ は $H_k(P_1/P_0,[P_0])$ を直和した次数付き加群であり f_{P*} はその上の次数 0 の準同型であるが，とくにある次数 k を指定して表示したい場合は

$$f_{P*k} : H_k(P_1/P_0,[P_0]) \to H_k(P_1/P_0,[P_0])$$

などと表す．$H_*(P_1/P_0,[P_0])$ や f_{P*k} から元の力学系の S の近傍での振舞いについての情報を得たい．しかし，index pair の選び方は無数にあり $H_*(P_1/P_0,[P_0])$ も f_{P*} もその選び方に依存してしまう．そこで次のような同値関係を考える．

定義 15. 準同型 $f : X \to X$ と $g : Y \to Y$ は，ある自然数 $m \geq 1$ と準同型 $r : X \to Y$ 及び $s : Y \to X$ が存在して

$$r \circ f = g \circ r, \quad s \circ g = f \circ s, \quad r \circ s = g^m, \quad s \circ r = f^m$$

となるとき**シフト同値**であると言う．

任意の孤立不変集合 S に対してその index pair は必ず存在する．また，P と Q を S の 2 組の index pair とすると，f_{P*} と f_{Q*} はシフト同値であることが証明される．よって次のようにコンレイ指数を定義することができる．

定義 16. 孤立不変集合 S の**ホモロジーコンレイ指数**とは，P を S の index pair としたときの f_{P*} のシフト同値類のことである．

コンレイ指数から何がわかるのか．最も単純な結果は次のようなものである．

定理 17 (Ważewski principle [13, 18])**.** $P = (P_1, P_0)$ を S の *index pair* とする．このとき f_{P*} が $0 : \{0\} \to \{0\}$ とシフト同値でないならば，S は空集合ではない．

前に述べたように，我々は直接 S を見ることができずその近傍しか扱えないのだが，もしその近傍から計算したコンレイ指数が 0 とシフト同値でなければ，少なくとも S が空集合ではない，という情報は得られるのである．

Lefschetz の不動点定理を index pair により局所化された力学系 f_P に適用すると，次が得られる [13].

定理 18. $P = (P_1, P_0)$ を *index pair* とするとき，$\lambda(f_{P*}) \neq 0$ ならば $S := \mathrm{Inv}(P_1 \setminus P_0)$ は不動点を含む．より一般に $\lambda(f^n_{P*}) \neq 0$ ならば S 内に f^n の不動点が存在する．

他にも様々な情報がコンレイ指数から得られるのだが，では具体例においてどのようにコンレイ指数を計算すればよいだろうか．次節では計算機を用いてコンレイ指数の計算を実行する方法を見ることにしよう．

4.4 計算機によるコンレイ指数の計算

§3 の方法で力学系を離散化してあるとしよう．この離散化された情報からコンレイ指数を計算機で求めるたのステップは次のようになる．

ステップ 1．孤立化近傍の候補となる集合 $\mathcal{I} \subset \Omega$ をつくる
考えている不変集合が存在すると予想される領域を方体の集合 $\mathcal{I}$ により被覆する．これが孤立化近傍の第一近似となる．各方体が十分小さくないと以後のステップで計算が破綻する，もしくは自明な結論しか導き出せなくなってしまうが，単純に $\mathcal{I}$ の各方体を全て小さく分割すると，方体の数が増えすぎて計算時間が莫大になってしまう．そこでまず各方体を 2 等分し，次に注目する不変集合と関係ない方体を取り除くという作業を各方体が十分小さくなるまで繰り返す．

ステップ 2．孤立化近傍の条件を満たすように $\mathcal{I}$ を修正する
$\mathcal{B} \subset \Omega$ に対し

$$o(\mathcal{B}) := \{\omega \in \Omega \mid |\omega| \cap |\mathcal{B}| \neq \emptyset\}$$
$$d(\mathcal{B}) := o(\mathcal{B}) \setminus \mathcal{B}$$
$$\mathrm{Inv}(\mathcal{B}, \mathcal{F}) := \{\omega \in \mathcal{B} \mid \exists \gamma : \mathbb{Z} \to \mathcal{B} \text{ s.t. } \gamma(0) = \omega, \gamma(k+1) \subset \mathcal{F}(\gamma(k)) \text{ for all } k \in \mathbb{Z}\}$$

と定義する．いま $f(|\omega|) \subset \mathrm{int}\, \mathcal{F}(\omega)$ が保証されていることから $\mathrm{Inv}(|\mathcal{I}|, f) \subset |\,\mathrm{Inv}(\mathcal{I}, \mathcal{F})|$ が従う．よって $o(\mathrm{Inv}(\mathcal{I}, \mathcal{F})) \subset \mathcal{I}$ さえ確認すれば

$$\mathrm{Inv}(|\mathcal{I}|, f) \subset |\,\mathrm{Inv}(\mathcal{I}, \mathcal{F})| \subset \mathrm{int}\, |o(\mathrm{Inv}(\mathcal{I}, \mathcal{F}))| \subset \mathrm{int}\, |\mathcal{I}|$$

となり, $|\mathcal{I}|$ が f の孤立化近傍であることが示される．ステップ 1 の $\mathcal{I}$ が $o(\mathrm{Inv}(\mathcal{I}, \mathcal{F})) \subset \mathcal{I}$ を満たさない場合は，条件が成立するまで $\mathcal{I}$ に方体を少しづつ加減するアルゴリズムを用いる [13]．前者では最終的に空集合になってしまうことも多く，面白い不変集合を捉えにくい．そこで本稿の計算例では主に後者を用いている．

ステップ 3．$\mathcal{I}$ から index pair を構成する
$|\mathcal{I}|$ が f の孤立化近傍のとき，$\mathcal{B} = \mathrm{Inv}(\mathcal{I}, \mathcal{F})$,

$$(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_0) = \big((d(\mathcal{B}) \cap \mathcal{F}(\mathcal{B})) \cup \mathcal{B},\ d(\mathcal{B}) \cap \mathcal{F}(\mathcal{B})\big)$$

とおくと $P = (|\mathcal{P}_1|, |\mathcal{P}_0|)$ が $\mathrm{Inv}(|\mathcal{I}|, f)$ の index pair となる [13].

ステップ 4. ホモロジーを計算する

CHomP (http://chomp.rutgers.edu/) 等を利用し，f_{P*} を計算する．

$$f_{P*} : H_*(|\mathcal{P}_1|/|\mathcal{P}_0|, [|\mathcal{P}_0|]) \to H_*(|\mathcal{P}_1|/|\mathcal{P}_0|, [|\mathcal{P}_0|])$$

を計算機上での f の近似表現 $\mathcal{F}$ から計算することとなる．単体近似定理の場合と同様に，各方体が十分小さく，$\mathcal{F}$ による近似が十分よいことが計算可能性の必要条件となるが，方体の数が多くなると計算に必要なメモリの量及び計算時間が大きな障害となる．この問題を回避するため，CHomP にはホモロジーを変化させずに方体の数を減らすアルゴリズムが実装されている．

例 19. CHomP の example ディレクトリに含まれている repeller を実行してみよう．これは原点に反発的な不動点を持つ 1 次元力学系 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対し，原点のコンレイ指数を計算してみせる例である．

写像の情報は repeller.map に含まれている．これは f に対しステップ 1 を実行した結果である．ファイルの中身を cnvmap により変換すると

```
(1) -> {(0)}
(2) -> {(0) (1) (2)}
(3) -> {(2) (3)}
(4) -> {(3) (4) (5)}
(5) -> {(5) (6)}
(6) -> {(6) (7) (8)}
(7) -> {(8)}
```

のような情報が含まれていることがわかる．これは方体 (1) が (0) に写像され，また方体 (2) は (0), (1), (2) という 3 つの方体に写像される，等の情報を書きくだしたものである．

ステップ 2，3 を実行し index pair を得るには

```
indxpair repeller.cub repeller.mp repeller.q1 repeller.q0
```

とすれば良い．実行結果を見ると repeller.q1 には $Q_1 = \{(2), (3), (4), (5), (6)\}$ という 5 つの方体が，repeller.q0 には $Q_0 = \{(1), (7)\}$ という 2 つの方体が含まれている．得られた index pair は $P = (Q_0 \cup Q_1, Q_0)$ という組である（図 5）．

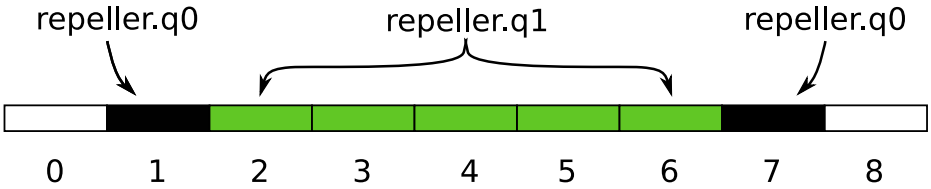


図 5　`repeller.q0, repeller.q1`

最終的にコンレイ指数を計算するには

```
homcubes -i repeller.map repeller.q1 repeller.q0
```

を実行する．実行結果から重要な部分を抜き出すと次のようになる．

```
H_0 = 0
H_1 = Z
...
The composition of F and the inverse of the map induced by the inclusion:
Dim 0:  0
Dim 1:  F (x1) = x1
```

上の計算結果は，

$$H_k(Q_0 \cup Q_1, Q_0) = \begin{cases} \mathbb{Z} & (k = 1) \\ 0 & (k \neq 1) \end{cases}$$

となること，また $H_1(Q_0 \cup Q_1, Q_0)$ の生成元 `x1` に対し $f_{P*}(\mathtt{x1}) = \mathtt{x1}$，すなわち

$$f_{P*} = \begin{cases} \mathrm{id} & (k = 1) \\ 0 & (k \neq 1) \end{cases}$$

を示している．

4.5　コンレイ指数の力学系への応用

4.6　周期点の存在および非存在

まず周期点の存在検証を考えよう．存在証明の原理は Lefschetz の不動点定理であるが，命題 5 を利用することも議論の要点である．不安定な周期点であっても，有向グラフを用いれば確実に発見することができ，また逆に有向グラフに k-サイクルが存在しなければ，考えている領域には k-周期点は 1 つも存在しないことが厳密に示せるのである．

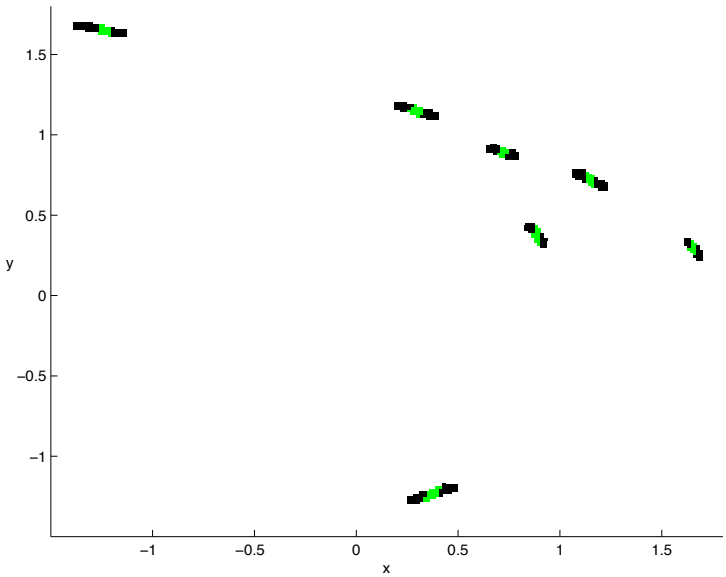


図 6　エノン写像のある 7 周期点に対する index pair

例 20. エノン写像

$$H_{a,b} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a - x^2 + by \\ x \end{pmatrix}$$

の 7 周期点の存在を証明してみよう．パラメータは $a = 1.4, b = 0.3$ とする．図 6 は §4.4 の方法により構成した index pair であり，灰色の領域が $P_1 \setminus P_0$，黒の領域が P_0 を表わす．`CHomP` による計算を実行すると $\lambda(f^7_{P*}) = 7$ となることがわかる．よって定理 18 より $\mathrm{Inv}(P_1 \setminus P_0)$ は f^7 の不動点を含む．P_1 が f の不動点を含まないことは有向グラフから簡単に示せるので，結局 $\mathrm{Inv}(P_1 \setminus P_0)$ は 7 周期点を含むことがわかる．

例 21. 同じパラメータのエノン写像で今度は 5 周期点を探してみよう．先ほどと同様に有向グラフを用いて 5 周期的な方体を探すと，十分細かい分割では素周期が 5 となる方体は存在せず，周期が 1，すなわち像が自分自身と交わる方体しか存在しないことがわかる．いまエノン写像の二つの不動点は双曲型であり，Hartman-Grobman の定理が成立する近傍の大きさを評価することで [4]，周期が 1 の方体の中には不動点しか存在しないことが示せる．よって，このパラメータではエノン写像は 5 周期点を持たない．

4.7 記号力学系・エントロピー

§4.2 で触れたエントロピー不等式にもコンレイ指数版が存在するが，技術的な問題からこの不等式では有効な評価が得られない場合も多く，実際の応用では記号力学系への半共役写像の存在というより強い主張を経由してエントロピーを評価することが多い．ここでは Day-Frongillo-Trevino [7] による手法を紹介する．

頂点の集合を V とする有向グラフ G に対して

$$X_G := \{(v_i)_{i\in\mathbb{Z}} \mid v_i \in V \text{ かつ任意の } i \text{ に対し } v_i \text{ から } v_{i+1} \text{ へ辺が存在する }\}$$

と定義する．X_G に含まれる頂点の列で，周期的なものをサイクルと呼ぶ．集合 X_G は適当に距離を定めることにより距離空間となる．さらに写像 $\sigma_G : X_G \to X_G$ を

$$\sigma_G((v_i)_{i\in\mathbb{Z}}) = (v_{i+1})_{i\in\mathbb{Z}}$$

により定義すると連続写像となり，従って σ_G は離散力学系と見ることができる．この力学系は代数的に構成されているため，様々な不変量を厳密に求めることができる．例えば位相的エントロピーも

$$h_{\mathsf{top}}(\sigma_G) = \log s(T_G)$$

と具体的に計算できる．ここで T_G はグラフ G の行列表現，$s(T_G)$ はそのスペクトル半径を表す．

定理 22. 孤立化近傍 $N \subset X$ が互いに交わらないコンパクト集合 $N_1, \ldots, N_k$ の和であるとする．さらに有向グラフ $G = (\{1, \ldots, k\}, E)$ が存在して，G の任意のサイクル $\gamma = a_1 \cdots a_m$ と $f_\gamma := f|_{N_{a_m}} \circ \cdots \circ f|_{N_{a_1}}$ に対し $\mathrm{Inv}(N_{a_1}, f_\gamma)$ の *index pair* P_γ が存在して

$$\lambda(f_{P_\gamma *}) \neq 0$$

を満たすとする．また G の全ての辺に対し，その辺を含むような G のサイクルが存在するとする．このとき $\rho : \mathrm{Inv}(N) \to X_G$ を

$$(\rho(x))_i = j \iff f^i(x) \in N_j$$

と定義すると ρ は半共役写像となる．

この定理から得られる半共役に対して命題 11 の不等式 (4) を用いると

$$h_{\mathsf{top}}(f) \geq \log s(T_G)$$

という f の位相的エントロピーの下からの評価が求まる．

定理 15 の証明のあらすじ． ρ が連続になることと，可換性 $\sigma_G \circ \rho = \rho \circ f$ をみたすことは構成から従う．問題は ρ の全射性である．X_G の周期点集合を P と書くと，G の辺に関する仮定より P は X_G で稠密である．また Lefschetz 数の仮定により，P の各サイクルに対して，ρ でそのサイクルに写像されるような f の周期点を定理 18 を用いて見つけることができる．よって $P \subset \operatorname{im}\rho$．いま $\operatorname{im}\rho$ はハウスドルフ空間 X_G のコンパクト集合なので閉集合である．従って $\operatorname{im}\rho = \operatorname{cl}(\operatorname{im}\rho) \supset \operatorname{cl}(P) = X_G$. □

コンレイ指数は小さな摂動に対して安定なので，定理 22 により発見される記号力学系もまた摂動に対して存続する．一般の力学系に記号力学系が構造不安定な不変集合として含まれている場合ももちろん考えられるが，そのような不変集合はこの定理では発見できない．ただし Katok の定理 [14] により，2 次元の力学系に対してはその位相的エントロピーを双曲型の不変部分集合によりいくらでも近似できることがわかっており，このことから計算精度を上げれば定理 22 による位相的エントロピーの評価は真の値に近づくと期待される．

5 一様双曲性を証明するためのアルゴリズム

この節では一様双曲性を証明するためのアルゴリズム [1] を簡単に解説する．

まず，このアルゴリズムで何ができるかエノン写像を例にみてみよう．

定理 23. パラメータ (a, b) が図 7 の領域に含まれるとき，エノン写像の鎖回帰集合 $\mathcal{R}(H_{a,b})$ は一様双曲的である．

注意 24. 同じパラメータ領域で，エノン写像は $\mathcal{R}$-構造安定，すなわち小さな摂動を加えても鎖回帰集合同士が位相共役となる．このことは鎖回帰集合の一様双曲性から自動的に従う [19].

右側の一番大きな領域は，$\mathcal{R}(H_{a,b})$ が馬蹄形写像になる領域であり，一番左の領域では $\mathcal{R}(H_{a,b}) = \emptyset$ となる．これらの領域での双曲性は手計算で示せる場合もあるが [10]，この定理のポイントはそれ以外の多くの領域における一様双曲性も示したことである．特に Davis-MacKay-三波 [6] により一様双曲性が予想されていた領域をこの定理は含む．

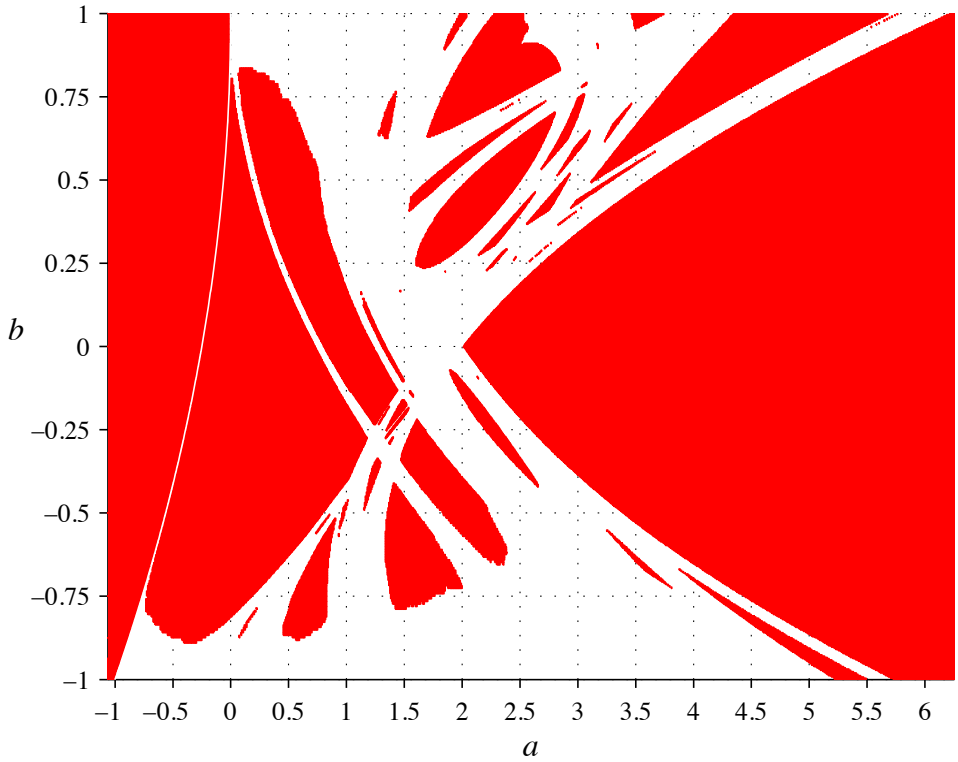


図 7　エノン写像の構造安定なパラメータ領域（の部分集合） [1]

5.1　擬双曲性

M を多様体，f を M の微分同相写像とする．Λ を f のコンパクト不変集合とし，$T\Lambda$ で接束 TM の Λ 上への制限を表わすことにする．

定義 25. f が Λ 上で**一様双曲的**である，もしくは Λ が一様双曲的不変集合であるとは，$T\Lambda$ が Tf-不変な部分束の直和 $T\Lambda = E^s \oplus E^u$ に分解し，さらに定数 $c > 0$ と $0 < \lambda < 1$ が存在して

$$\|Tf^n|_{E^s}\| < c\lambda^n \quad \text{and} \quad \|Tf^{-n}|_{E^u}\| < c\lambda^n$$

が全ての $n \geq 0$ で成立することをいう．ここで $\|\cdot\|$ は M の適当な計量である．

2 つの定数 c と λ を同時に制御しなくてはならないことから，この定義に従って一様双曲性を証明するのは一般に簡単ではない．広く用いられる “cone fields” を使用する議論

も同様の困難を持つ．M 上に $T\Lambda$ の分解に沿って上手に計量を構成することにより $c=1$ とすることもできるが，そのような計量の構成はそれ自体がまた難しい問題である．

この困難を回避するため，ここでは擬双曲性という概念を導入する．

まず f の微分 Tf はそれ自体で力学系 $Tf : TM \to TM$ を与えていると思う．Λ が f-不変であることから $T\Lambda$ は Tf-不変となり，よって $Tf : T\Lambda \to T\Lambda$ という力学系が考えられる．以下では Tf の軌道はそれが TM の 0-切断の像に含まれる，すなわち 0 ベクトルのみから成るときに**自明である**と言うことにする．

定義 26. f が Λ 上で**擬双曲的**であるとは，$Tf : T\Lambda \to T\Lambda$ が非自明な有界軌道を持たないことをいう．

一様双曲性から擬双曲性が従うことを見るのは簡単である．しかし逆は一般に成立せず，擬双曲性は一様双曲性より真に弱い概念である．ところが，もし $f|_\Lambda$ が鎖回帰的である，すなわち $\mathcal{R}(f|_\Lambda) = \Lambda$ が成立するならば，これらの概念は一致することがわかる．

定理 27 ([5, 20])**.** $f|_\Lambda$ が鎖回帰的ならば，f が Λ 上で一様双曲的になるための必要十分条件は f が Λ 上で擬双曲的であることである．

次に，この擬双曲性の定義を孤立化近傍の言葉を使ってより計算機で扱いやすい形に言い換えよう．

コンパクト集合 N が f の**孤立化近傍**であるとは [18]，その最大不変集合

$$\mathrm{Inv}_f\, N := \{x \in N \mid f^n(x) \in N \text{ for all } n \in \mathbb{Z}\}$$

が N の内点集合 $\mathrm{int}\, N$ に含まれることをいう．また f の不変集合 S はある孤立化近傍 N が存在して $\mathrm{Inv}_f\, N = S$ となるとき**孤立不変集合**であるという．

もし $Tf : T\Lambda \to T\Lambda$ の非自明な有界軌道が 1 つでも存在したならば，Tf がファイバー方向に線型であることから，その軌道の線型倍も全て非自明な有界軌道となり，従って $T\Lambda$ の 0-切断の任意の近傍は非自明な有界軌道を持つ．このことから，擬双曲性の定義は $T\Lambda$ の 0-切断が $Tf : T\Lambda \to T\Lambda$ の孤立不変集合であることであると言ってもよいことがわかる．

さらに，実は 0-切断を含む孤立化近傍 N を何でもよいから 1 つ見つけてしまえば，自動的に $\mathrm{Inv}_{Tf}\, N$ は 0-切断そのものになることが示され，よって次の補題が成り立つ．

命題 28. $Tf : T\Lambda \to T\Lambda$ の孤立化近傍 $N \subset T\Lambda$ であって $T\Lambda$ の 0-切断の像を含むものが存在するならば，Λ は擬双曲的である．

5.2 アルゴリズム

実際に与えられた力学系の双曲性を証明するためには，次のようなアルゴリズムを走らせればよい．

1. Choose K such that $\mathcal{R}(f) \subset K$ holds, and put $N := K \times D$ where D is the unit square in the tangent space.
2. Compute $\operatorname{Scc} G(K)$.
3. Replace K with $|\operatorname{Scc} G(K)|$.
4. Replace N with $N \cap (K \times D)$.
5. Compute $\operatorname{Inv} G(N)$.
6. `if` $|\operatorname{Inv} G(N)| \subset \operatorname{int} N_0$ `then` the algorithm stops.
   `else` subdivide K, N and `goto` 2

定理 29. このアルゴリズムが停止したならば, $\mathcal{R}(f)$ は一様双曲的である．

ただし，このアルゴリズムを適用するためには，まず定理 27 の仮定が満たされていることを確認しなくてはならない．コンパクトな多様体上の力学系の場合には $\mathcal{R}(f)$ は自動的に鎖回帰的になるので問題はないが，エノン写像の場合は相空間がコンパクトではないので少し注意しなくてはならない．Devaney-Nitecki [10] に従い次のように定義する．

$$R(a,b) := \frac{1}{2}(1 + |b| + \sqrt{(1+|b|)^2 + 4a}),$$
$$S(a,b) := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \le R(a,b), |y| \le R(a,b)\}.$$

すると次が初等的議論により示される．

補題 30. 鎖回帰集合 $\mathcal{R}(H_{a,b})$ は $S(a,b)$ に含まれる．さらに，$H_{a,b}$ を $\mathcal{R}(H_{a,b})$ に制限すると鎖回帰的である．

これで一様双曲性を証明するための基本的な準備はできたが，上記のアルゴリズムはある固定された写像の一様双曲性を示すためのアルゴリズムなので，定理 23 を証明するためには，パラメータ空間で色々とパラメータを取り替えながら自動的に走るように拡張しなくてはならない．詳しくは [1] の Algorithm 15 を参照のこと．

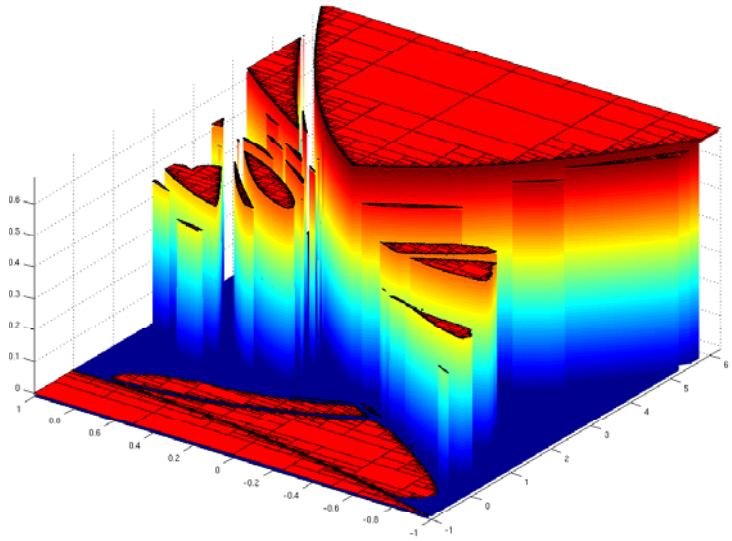


図 8　エノン写像のエントロピーの下からの評価 [11]

5.3　構造安定性の応用

Frongillo[11] は前節で解説した定理 22 と，定理 23 を組み合わせることでエノン写像の位相的エントロピー評価を広いパラメータ領域で得ることに成功している（図 8）.

彼らは図 7 の一様双曲的なパラメータ領域の各連結成分からパラメータが 1 つづつ選び，定理 22 を用いて位相的エントロピーの評価が求めている．$\mathcal{R}$-構造安定な領域では位相的エントロピーは一定なので，離散的に選んだパラメータに対する計算からこのように広い範囲での評価を得ることができるのがポイントである.

他の応用としては，複素エノン写像を 1 次元 2 次多項式の複素力学系とみたときに，その「マンデルブロ集合」のトポロジーが一次元の 2 次多項式と全く異なるものであることを示した結果 [2] がある．さらにこの結果は，一次元写像の keading theory の高次元化である pruning front theory にも応用がある [3].

6　Software Packages

本節では本稿の内容に関連するソフトウェアについて解説する.

6.1 GAIO (Global Analysis of Invariant Objects)

`http://math-www.uni-paderborn.de/~agdellnitz/gaio/`

M. Dellnitz and O. Junge らによって開発された力学系の研究のための汎用パッケージである．Python 版と MATLAB 版の二種類のインターフェースがあるが，現在メンテナンスされているのは MATLAB 版のみのようである．もちろん無料で利用できるが利用するためには作者らにメールで連絡を取る必要がある．

GAIO には § 3 で述べたような空間の分割を扱うためのデータ構造が二分木を用いて実装されている．GAIO そのものは標準では精度保証付き数値計算を用いない設計になっているので，計算機援用証明をするためには以下に述べる Boost や CAPD などで書いた `C/C++` の関数を MATLAB から呼び出して組み合わせることができる．

6.2 Boost interval arithmetic library

`http://www.boost.org/`

Boost とは `C++` の標準化委員会のメンバーらが開発する汎用のオープンソースライブラリであるが，その中に区間演算用の Boost interval arithmetic library が含まれる．非常に柔軟性の高く，また完成度の高いライブラリであり，現在 `C++` で区間演算を用いようと思うならばまず検討すべきライブラリである．区間の端点となる型は double に制限されない．GMP などのライブラリを用いれば多倍長浮動小数点を用いることもできるし，演算に誤差を含まない多倍長有理数型などを用いて区間演算を行なうこともできる．

6.3 CAPD (Computer Assisted Proofs in Dynamics)

`http://capd.wsb-nlu.edu.pl/`

§ 2.1 で紹介した [12] の Z. Galias や P. Zgliczyński，また `CHomP` の P. Pilarczyk など一連のポーランドの研究者が開発した精度保証付き数値計算を用いた計算機援用証明のためのパッケージである．区間演算のための `C++` クラスだけでなく，§ 2.1 の最後で触れた Lohner アルゴリズムなどを含むベクトル場の厳密な積分のための様々なルーチンを多数用意した，たいへん便利なライブラリである．ただし，まだ盛んに開発が進められているため，バージョンにより実装が大きく変化することがあるので注意されたい．

6.4 INTLAB (INTerval LABoratory)

`http://www.ti3.tu-harburg.de/rump/intlab/`

ハンブルク工科大の Siegfried M. Rump らが中心となり開発する，Matlab 上で区間演算をするためのライブラリ．Matlab 上で動作するため，速度的には上記の `C++` ライブラリたちに劣るが，それほど大規模でない問題に対して手軽に区間演算を行ないたい向きには最適である．

6.5 CHomP (Computational HOMology Project)

`http://chomp.rutgers.edu/`

位相空間のホモロジー群や，その上の連続写像がホモロジー群に導く準同形を求めるためのソフトウェア．そもそもコンレイ指数を具体的な力学系で計算したいという動機のもとに開発が始まったソフトウェアであるが，力学系の研究だけでなく偏微分方程式が生成するパターンの解析やイメージプロセッシングなどにも広く応用されている．多くの数学者が開発にかかわっているが，コーディングの中心となっているのは P. Pilarczyk である．

参考文献

[1] Z. Arai, On Hyperbolic Plateaus of the Hénon Maps, *Experimental Mathematics*, **16:2** (2007), 181–188.

[2] Z. Arai, On Loops in the Hyperbolic Locus of the Complex Hénon Map and Their Monodromies, preprint.

[3] Z. Arai, Monodromy and the Pruning Front, in preparation.

[4] Z. Arai and K. Mischaikow, Rigorous computations of homoclinic tangencies, *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems* **5** (2006), 280–292.

[5] R. C. Churchill, J. Franke and J. Selgrade, A geometric criterion for hyperbolicity of flows, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **62** (1977), 137–143.

[6] M. J. Davis, R. S. MacKay and A. Sannami, Markov shifts in the Hénon family, *Physica D*, **52** (1991), 171–178.

[7] S. Day, R. Frongillo and R. Trevino, Algorithms for rigorous entropy bounds and symbolic dynamics, preprint, 2007.

[8] M. Dellnitz and O. Junge, Set oriented numerical methods for dynamical systems, *Handbook of dynamical systems II*, North-Holland, 2002, 221–264.

[9] M. Dellnitz and O. Junge, The web page of GAIO project, `http://math-www.uni-paderborn.de/~agdellnitz/gaio/`

[10] R. Devaney and Z. Nitecki, Shift automorphisms in the Hénon mapping, *Commun. Math. Phys.*, **67** (1979), 137–146.

[11] R. M. Frongillo, Topological Entropy Bounds for Hyperbolic Dynamical Systems, `http://www.cam.cornell.edu/~rfrongillo/dynamics/paper.pdf`

[12] Z. Galias and P. Zgliczyński, Computer assisted proof of chaos in the Lorenz equations, *Physica D*, **115** (1998), 165–188.

[13] T. Kaczynski, K. Mischaikow and M. Mrozek, *Computational Homology*, Applied Mathematical Sciences, **157**, Springer-Verlag, 2004.

[14] A. Katok, Lyapunov exponents, entropy and periodic orbits for diffeomorphisms, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **51** (1980), 137–173.

[15] K. Mischaikow and M. Mrozek, Chaos in the Lorenz equations: a computer-assisted proof, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, **3** (1995), 66–72.

[16] K. Mischaikow and M. Mrozek, Chaos in the Lorenz equations: a computer-assisted proof. II. Details, *Mathematics of Computation*, **67** (1998), 1023–1046.

[17] K. Mischaikow and M. Mrozek, Chaos in the Lorenz equations: a computer-assisted proof. III. Classical parameter vallues, *J. Differential Equations*, **169** (2001), 17–56.

[18] K. Mischaikow and M. Mrozek, The Conley index theory, *Handbook of Dynamical Systems II*, North-Holland, 2002, 393–460.

[19] C. Robinson, *Dynamical systems; stability, symbolic dynamics, and chaos*, 2nd ed., CRC Press, Boca Raton, FL, 1999.

[20] R. J. Sacker and G. R. Sell, Existence of dichotomies and invariant splitting for linear differential systems I, *J. Differential Equations*, **27** (1974) 429–458.

[21] W. Tucker, A rigorous ODE solver and Smale's 14th problem, *Found. Comput. Math.*, **2** (2002), 53–117.

[22] Y. Yomdin, Volume growth and entropy, *Israel J. Math.* **57** (1987), 285–300.

[23] P. Zgliczyński, C^1 Lohner algorithm, *Fuound. Comput. Math.*, **2** (2002), 429–465.