

3.3 最適化区分

3.3.1 最適化コアモデルと関連諸技術

(1) 研究開発領域名

最適化コアモデルと関連諸技術

(2) 研究開発領域の簡潔な説明

最適化という学問分野を一言で述べるならば、「関数を最小化(最大化)するための数理とアルゴリズム、そして、それに拘わるモデルやモデリングの方法論」である。システム科学や数理科学において、最適化はそれ自身が研究対象となると同時に、他の諸分野の道具となるという点において、勝れて横断的な分野である。道具として普遍的であるという点では、一面、数学と類似した性格を有する。モデリングの道具立てとしての最適化には2つの側面がある。(1)現実を一番よく説明するモデルを構築するための最適化、(2)モデルに基づいて最適にシステムを設計するための最適化。最適化には大きく分けて「数理最適化」と「シミュレーション最適化」の2つがある。前者は線形計画を代表とする数理に裏付けられた最適化であり、基本的に厳密最適解を求めることを指向する。後者は遺伝的アルゴリズム等、生物学や物理学における最適化過程のメタファーを計算機上で実現する最適化手法であり、良い解を求めることを指向し、必ずしも厳密な最適解を求めることには拘らない。本研究開発領域では、数理最適化に重点を置くが、道具としての普遍性を主張する以上、両方に目配りする必要がある。システム科学として分野融合的な広い視点に立った研究者や技術者が活躍する上での基盤を求めたい。

(3) 研究開発領域の詳細な説明と国内外の動向

本領域では、シミュレーション最適化にも一定の注意を払いつつも、数理最適化により重点を置く。ここで、数理最適化を、「連続的最適化」、「離散的最適化」、そして「最適化モデル」の3分野に分ける。連続的最適化は連続空間での、離散最適化は組み合わせの最適化である。そして、最適化モデルとは、「線形計画、凸2次計画、半正定値計画、ネットワーク、劣モジュラ関数最適化等といった、有用な構造を持ち、それを効率的に解くことができる一連の問題」である。最適化モデルの分野は、「他分野のモデリングに最適化モデルを積極的に活用できる」という点で、分野融合的な視点から非常に重要である。最適化を最適化のアルゴリズム開発という視点のみで捉えるのでは、あくまでも、最適化はモデリングにかかわるといよりは、単にモデルを最適化する「道具」に過ぎないが、最適化モデルとここで呼ぶ一連の問題があるために、他分野でのモデリングにより積極的に活用される。このような背景を念頭に、以下では、最適化という分野のシステム科学や数理・モデリング科学の中での位置づけ、他分野とのかかわりを意識して検討材料を提供したい。

(3-1) 数理最適化の“文化”

方法論としての数理最適化の特徴は「最適解」を求めることに対する拘りである。「あくまでも厳密な最適解を求める」という精神を大事にしてきたことで最適化の分野は発展してきた。難しい最適化問題に対し、その制約領域をより広げ簡単化することで得ら

れる最適化問題を「緩和問題」という。緩和問題を活用することで、元の問題の最適解や最適値に関する近似解を得ることができる。また、双対問題を考えることによって、元の問題の最適値の厳密な見積もりができる。緩和問題や双対問題の活用によって、難しい問題の最適解を厳密に求めようとする、これはある意味で、その分野を特徴づけるオタクな部分であり、風土であるといえる。しかし、システム科学における最適化は、この精神を基軸としつつもよりダイナミックに近隣分野と相互作用して発展していく、より開かれた形での分野であるべきであろう。最適化の分野では、アルゴリズムの発展により、新しい最適化問題が解けるようになると、それがさらに新しいモデリングの契機となる。しばしばそれが、さらなるアルゴリズムや関連する数理の進展を促すという段階的な発展を促す。このダイナミズムは随所に見られ、分野横断型の研究の推進力となっている。その核となってきたのが、線形計画、凸2次計画、半正定値計画等の「最適化モデル」である。もちろん、最適化モデルの研究自身が、上述のオタク的精神の賜物であることはいままでもない。一方、世の中で最適化が利用されるときには、ユーザーは「良い使いやすい解」を得ることを指向しており、「厳密な最適解の価値」は必ずしも高くないことに留意すべきである。目的関数はユーザーがしたいことの「第0近似」に過ぎない。

(3-2) 最適化自身を研究することと個別分野での最適化研究との違い

数理科学やシステム科学の営みとして、モデルを構築し、そのパラメータを目的関数を調整することにより、最適化することが行われる。そこで、個別分野ごとに分野の特質を生かした最適化手法などが開発される。その典型例が統計学や機械学習におけるEMアルゴリズムである。一方、最適化分野で主として研究されるのは、

- (A) 準ニュートン法や非線形最適化法、分岐限定法など、一般的な枠組みの問題に対する数理とアルゴリズム。
- (B) 豊富な良い構造を持ち、多くの問題がそこに帰着され、効率的な解法が存在する問題、典型的には線形計画問題や半正定値計画問題、劣モジュラ関数最小化などに関する数理とアルゴリズムとモデリング。
- (C) 豊富な良い構造を持ち、多くの問題がそこに帰着されるが必ずしも効率的な解法が存在しない問題、典型的には巡回セールスマン問題や最大カット問題等に関する数理とアルゴリズムとモデリング。

他分野との関連でいうと、(A)のような研究成果は、各分野ごとに解きたい問題の特徴を有効に生かして各個別分野ごとのアルゴリズムに深化する。(B)のような枠組みは、「最適化モデル」に相当し、別分野での新たなモデリングの可能性を追求する強いモチベーションを与える。(C)は、多くの場合混合整数計画問題に帰着するが、個別の問題に対して効率的なアルゴリズムを得ることを目指して研究が行われる。

(3-3) 最適化のモデリングへの影響

最適化が計算推論における基本的なエンジンの役割を果たす以上、最適化技術の展開は種々のモデリングに根本的な変化をもたらす可能性がある。その例は凸2次最適化によるサポートベクターマシンや制御理論における半正定値計画法である。前者は1990年代初頭に内点法によって凸2次最適化が実用化されることによって、着想された方法である。後者についても内点法により半正定値計画問題が実用化は分野に大きな影響を

与えた。数理ファイナンスの分野における平均・分散モデルなども、凸2次最適化が実現されることによって新しい展開を遂げた。また、現在非常に活発に研究されている、圧縮センシングの分野では、線形計画や半正定値計画が単なる解法ではなく、モデリングの枠組みあるいは方向性を定める上で重要な役割を果たしている。今後、特に重要な影響があると思われるものに、混合整数計画問題と半正定値計画問題を挙げておく。これらの問題については、モデリング側からの求解に対する要求がより強い。現在の計算機の高性能化を考えると、現時点においても、混合整数計画問題の強力なソルバーと Excel 上でのモデリングシステムがリンクされた形でしかもフリーな形で提供されると社会的インパクトは相当に大きいと考えられる。

(3-4) 問題の大規模化

近年本分野で問題となっていることに問題の大規模化がある。特に機械学習や大規模データ(しばしばビッグデータなどと称される)解析、2次元・3次元データを扱う分野では、数百万変数、数千万変数の最適化問題を解く必要がある。典型例が、画像や時空間モデル、データ同化、マーケティングデータ等の最適化であるが、これらの最適化問題においては、降下方向を求めることすら容易ではない。ある意味では、現在は、1950年代、60年代に状況が似ているともいえる。すなわち、解きたい問題のサイズに対して計算機の手数や記憶容量が追いついていない部分がある。また、問題の大規模化により、計算精度が倍精度では不足するなどの計算インフラ上の問題もある。

(3-5) 確率的最適化と応用

最近、機械学習、そして金融工学をはじめとするリスク管理に関連する分野では、シミュレーションを通じて確率的に計算される関数の最適化やさまざまなシナリオが確率的に実現される状況での最適戦略を求める確率計画法、問題に含まれる不確実性を考慮した上でミニマックス最適解を求めるロバスト最適化等が重要になり、盛んに研究が進められている。確率的最適化の考え方は超大規模最適化問題を解く上でも有効である。リスク管理がモデリングの分野として重要になりつつある現在、確率的最適化と応用は注目すべき研究分野である。

(3-6) 最適化の数理・アルゴリズムと関連分野

最適化が関連する分野として大きいのは、数学と計算機科学である。後述するように、最適化問題の解法の計算複雑度は、計算機科学分野と密接な関連を保って進展してきた。数学については、最適化の分野の自律的な研究結果として得られてきた数学理論とより広い範囲で相互的に影響しあってきた分野がある。たとえば、前者としては連続的最適化問題の最適性条件、双対理論、後者としては凸解析と関数解析、内点法と Euclidean Jordan 代数、実代数幾何と多項式最適化 などがある。近年の流れとして、数理として研究されてきたものが具体的に計算することを意識して見直されているものも多い。特に半正定値計画問題に代表される凸最適化の実用化は、数学的研究対象としての凸性を、計算やアルゴリズムを意識した立場から見直すことにつながりつつあると考えられる。(類似のことは、過去にグラフ理論について、ネットワーク問題等の見直しから考えられた。) また、計算という立場からは、数値計算の分野と最適化も密接な関連がある。連続的最適化のアルゴリズムを最適解へ流れ込むベクトル場を追跡して解析することがよく行われるが、これは力学系や微分幾何、情報幾何等とも密接に関連する。離散

最適化におけるランダム化アルゴリズムの解析は、確率・統計等とも関係がある。微分方程式をデータに合わせる分野は近年データ同化といわれ注目を集めている。この分野も大規模最適化を必要とする。統計や機械学習の分野では、データからのオンライン(オフライン)学習、情報理論の分野でも符号長最短化という視点で最適化が行われる。制御におけるモデル同定もある種の最適化である。

(3-7) 最適化モデルとその発展の歴史

本稿では「最適化モデル」を1つの重要な軸として論を展開しているが、以下に、最適化モデルを中心とした最適化の進展を概説する。歴史的には最適化は統計学の最小二乗法やL1回帰との繋がり、力学と線形等式・不等式系との関係、物理学における変分原理、オイラーの一筆書きやハミルトン閉路等に断片的にその前史を認めることができ、さらに、1930年代ソ連の Kantorovich や Leontief による線形計画による経済の解析などへと続く。しかしながら本格的に最適化が学問分野として勃興したのは、1947年、Dantzig による線形計画問題に対する単体法の発見ののちのことである。線形計画問題の特徴は、連続的最適化でありかつ離散的最適化である点にあり、線形計画法を礎として、連続的最適化の分野では、最急降下法や Newton 法、準 Newton 法等のアルゴリズム、そして、最適性条件等の数学的理論や凸解析などの分野が1960年代から1970年代にかけて発展した。離散的最適化の分野では、グラフやネットワークに関するアルゴリズムが同様に1960年代から1970年代にかけて発展した。両方で重要な役割を果たしたのが、双対理論である。アルゴリズムと数理という立場からみると、最適化分野の初期の発展は上記のように要約できよう。モデリングの観点からも、線形計画問題は「簡潔で豊かな構造を持ち、多くの問題をそこに帰着することができる」という点で画期的であった。「豊かな数理的構造とそれを解く優れたアルゴリズムが存在する最適化問題」があつてはじめて最適化モデリングという分野が成立する。線形計画問題にかかわる「モデリング・数理・アルゴリズム」の分野が包括的に線形計画「法」という言葉で呼ばれる所以である。

1970年代、計算複雑度の理論が勃興したことは、最適化分野に大きな影響をもたらした。最適化問題の求解の手間を評価する視点が生まれ、まず、離散的最適化の分野においてさまざまな成果が得られた。1979年、ハチヤンが線形計画問題が楕円体法によって多項式時間で解けることを示した。楕円体法は実用的アルゴリズムではなかったが、離散的最適化問題のアルゴリズムの理論の発展に大きく寄与した。そして、1984年、カーマーカーによって、線形計画問題に対する実用的多項式時間解法である内点法が発見された。

内点法は、90年代にかけて、凸2次計画問題、さらに、凸計画問題に一般化された。これにより、特筆すべきは、半正定値計画問題である。半正定値計画問題は、線形計画と驚くべき類似性が成立する最適化問題である。半正定値計画問題は、線形計画問題に引き続く有力な最適化モデルであり、21世紀の線形計画問題と呼ばれることもある。線形計画問題に対しては線形計画法という分野が確立しているが、半正定値計画問題に関するモデリング・数理・アルゴリズムは未だに発展途上であり、数理諸分野で現在活発に研究されている。

(3-8) シミュレーション最適化の進展

先にも述べた通り、近年、タブサーチ、遺伝的アルゴリズム、Particle Swarm 最適化等、シミュレーションベースの最適化の活用分野が広がりつつある。これらの手法の嚆矢となったのは、シミュレーテッド・アニーリングであり、これらの手法は、多数の最適化候補が相互作用しつつより良い最適解を構成するよう協調する、という点に特徴がある。これらの手法は、目的関数が計算できさえすれば適用できることもあり、その実行においては、非常に多数回の目的関数を計算する必要があるとしても、計算機の性能が向上したため、工学の多くの分野で利用されており、注目すべき分野である。エージェントベースシミュレーション等の人工生命分野はもちろんのこと、統計や機械学習分野における、ベイズ推定やマルコフチェーンモンテカルロ等の分野との関連も興味深い。ただし、データ同化など、目的関数自身の計算がスパコンを用いないと不可能であるような超大規模問題への適用は困難である。

(3-9) 研究開発領域としての最適化

分野としての横断的な性格を強調し、システム科学諸分野と最適化がネットワーク状の形、あるいは融合的な形で結びついた形での広い研究開発領域を設定するべきと考える。

(3-10) 今後重要となると考えられる課題

以下に掲げる問題が重要であり、システム科学の深化に資するものと考えられる。

○他分野とのかかわりにおいて

機械学習や統計分野における超大規模最適化

機械学習とオンライン最適化

データ同化における最適化

人員配置やスケジューリングにおける最適化

信号処理や制御分野における最適化モデリング

実問題での最適化モデリング方法論（現場で使える解とのギャップの問題）

正定対称行列に関する数理とモデリング

○最適化分野

21世紀の線形計画を古典的線形計画法と同レベルの完成度を持った技術に仕上げていく

線形計画、半正定値計画、対称錐計画に引き続く「最適化モデル」の探求

凸性によるモデリング、緩和による難しい最適化問題の解法と凸最適化

行列の最適化

超大規模連続的最適化

大規模整数計画法

確率計画法

シミュレーション最適化：遺伝的アルゴリズム・メタヒューリスティクス・多目的最適化等

（3-11）分野の国際的な位置づけ

SIAM、ICAIM 等の応用数理系国際学会では、重要な役割を果たしている。

（3-12）我が国の位置づけ

我が国は、最適化分野では、優れた仕事を着実に輩出している。より具体的には、

1. 内点法と関連ソフトウェア
2. 非線形最適化と関連ソフトウェア
3. 相補性問題や変分不等式
4. 劣モジュラ関数最適化や離散凸解析
5. ネットワークフローやグラフ理論

等の分野において世界トップレベル（目安として、論文の引用数が 100 を超える、その業績が評価されることにより国際学会で特別講演をつとめる、あるいはトップジャーナルの編集者をつとめる）の業績が一定数ある。総合的に見て分野としては米国が一番進んでいるが、確実にその次の研究レベルは保っていると考える。一方、特に重要な分野である大規模整数計画法では米国やドイツのなどには劣ることが気になる。また、確率計画法など今後重要と思われる分野の研究者の層が薄い。従来蓄積の上に立ってさらに、幅広い視野を持ち、システム科学のいくつかの分野で横断的に活躍できる優秀な才能を集めて研究を進めることが重要である。

（4）科学技術的・政策的課題

大規模データ処理に関する最適化、人員配置やスタッフスケジューリング、確率最適化、Excel と混合整数計画ソルバーを基にした最適化モデリングシステム

（5）注目動向（新たな知見や新技術の創出、大規模プロジェクトの動向など）

圧縮センシング、大規模混合整数計画

（6）キーワード

機械学習、信号処理、画像処理、制御理論、統計学、データマイニング、凸最適化、半正定値最適化、線形最適化、整数最適化、0-1 最適化、確率的最適化、大規模最適化、スケジューリング、配送問題、人員配置、多目的最適化、モデル正則化、オンライン最適化

（7）国際比較

国・地域	フェーズ	現状	トレンド	各国の状況、評価の際に参考にした根拠など
日本	基礎研究	○	→	・連続最適化における内点法・離散最適化における劣モジュラ関数最適化等、世界的にトップレベルの成果を生み出してきており、欧州と並び米国に引き続くレベルにあると考えられる。レベルを維持するために後継者の育成が重要。一方、広い視野を持った研究者の育成も重要である。
	応用研究・開発	○	→	・半正定値計画のためのSDPA、最適化パッケージNUOPTなど、世界的にトップレベルのソフトウェアが生み出されているものの、単体法や整数計画のソフトウェアにおいては課題がある。高齢化社会の到来に対処するための人員配置やスケジューリング等に関する最適化、画像処理や高次元データ処理、機械学習のための超大規模最適化アルゴリズムが重要であると考えられる。
	産業化	○	→	・レベルは低くないが、問題のモデリング・最適化というアプローチの有効性への認識を高めるためにさらなる展開が必要である。
米国	基礎研究	◎	→	・ほぼすべての分野において、MIT、コーネル、スタンフォード、ジョージア工科大学等に、世界トップレベルの研究者を多数擁し、名実ともに世界トップである。情報数理の他分野とのボーダレス化が進んでいる。
	応用研究・開発	◎	→	・横型研究者が一定数おり、また、IMA、INPA、Banff International Research Station、Fields Institute 等研究集会等も盛んに行われており、異分野間の連携が柔軟に行われており、層の厚みも相俟って、この点でも世界トップである。
	産業化	◎	→	・ソフトウェア、コンサルテーション両方の側面があるが、双方とも豊富で優秀な人材が必要に応じて大学と連携しながら優れた製品を生み出している。大学研究者の起業が容易である点も重要である。
欧州	基礎研究	○	→	・総合的に見て、EU全体として比較すると、日本よりも水準は若干高いとも見えるが、個別の国レベルで見るとほぼ日本と同等と考えられる。日本と同様、各国において、トピック別に世界的に見て強い分野が幾つかある。
	応用研究・開発	○	→	・EUを通じた連携があり、さまざまなプロジェクトが進められておりその点は日本より有利であると考えられる。ドイツでは(混合)整数計画法の優れたソフトウェアが開発されている。
	産業化	○	→	・国により異なるが、日本と同レベルであると考えられる。
中国	基礎研究	△	↗	・平均レベルは必ずしも高くないが、研究者の数が多く、米国で活躍している中国人研究者と連携しており、トップレベルはそれなりのものである。
	応用研究・開発	△	→	・現在は産業的なインフラが必ずしも整っていないが伸びしろは相当あると考えられる。
	産業化	△	→	・現在は産業的なインフラが必ずしも整っていないが伸びしろは相当あると考えられる。
韓国	基礎研究	△	→	・特に見るべき成果はない。長期的には伸びてくると考えられる。
	応用研究・開発	△	→	・特に見るべき成果はない。長期的には伸びてくると考えられる。
	産業化	△	→	・特に見るべき成果はない。長期的には伸びてくると考えられる。

（註1）フェーズ

基礎研究フェーズ：大学・国研などでの基礎研究のレベル

応用研究・開発フェーズ：研究・技術開発（プロトタイプの開発含む）のレベル

産業化フェーズ：量産技術・製品展開力のレベル

（註2）現状

※我が国の現状を基準にした相対評価ではなく、絶対評価である。

◎：他国に比べて顕著な活動・成果が見えている、○：ある程度の活動・成果が見えている、

△：他国に比べて顕著な活動・成果が見えていない、×：特筆すべき活動・成果が見えていない

（註3）トレンド

↗：上昇傾向、→：現状維持、↘：下降傾向

(8) 引用資料

本報告をまとめるにあたって参考としたものは以下の資料である。

- ・オペレーションズ・リサーチ 2005 年 4 月号特集「モデリング —最適化モデリング—」
(企画担当：池上敦子)
- ・オペレーションズ・リサーチ 2005 年 8 月号特集「モデリング —広い視野を求めて—」(企画担当：池上敦子)
- ・オペレーションズ・リサーチ 2007 年 4 月号「モデリング —さまざまな分野、さまざまな視点から—」(企画担当：池上敦子、土谷隆)

以上については、国立情報学研究所 CiNii (<http://ci.nii.ac.jp/>)より各記事をダウンロード可能。

モデリング的な視点から書かれている凸最適化の教科書として、B.Boyd and L.Vandenberghe: *Convex Optimization* を挙げておく。

最適化アルゴリズムの最近の国際的な研究動向については、<http://www.optimization-online.org/> (最適化のプレプリントサーバー)、*Mathematical Programming*, *SIAM Journal on Optimization*, *Mathematics of Operations Research* 等の学術雑誌に掲載されている各論文が参考となる。

機械学習分野における最適化への関心の高まりについては、例えば、書籍 *Optimization for Machine Learning* (eds. S.Sra, S.Nowozin, S.J. Wright, MIT Press, 2011) や *Journal of Machine Learning Research*、国際会議 NIPS 会議録等を参照のこと。

制御と最適化のかかわりについては、例えば、岩崎徹也: *LMI と制御*、培風館、1997 を参照のこと。

圧縮センシングについては、*Proceedings of the IEEE*, vol.98, no.6 (2010 June) の Special Issue, *APPLICATIONS OF SPARSE REPRESENTATION & COMPRESSIVE SENSING* (eds. R. G. Baraniuk, E. Candès, M. Elad, and Y. Ma) が参考となる。
和文解説として 田中利幸: 圧縮センシングの数理。電子情報通信学会、*Fundamentals Review*, Vol.4, No.1 (2010), p.39-47, (<http://w2.gakkai-web.net/gakkai/ieice/> より取得可能。)

Hans Mittelman のホームページ <http://plato.asu.edu/bench.html> には、種々の連続・離散最適化問題に対する最適化ソフトウェアのベンチマークによる性能比較が行われている。

3.3.2 連続的最適化

(1) 研究開発領域名

連続的最適化

(2) 研究開発領域の簡潔な説明

連続変数をもつ最適化問題の解法およびその応用に関する研究開発。

(3) 研究開発領域の詳細な説明と国内外の動向

連続最適化において最も基本にあるのは線形計画問題 (Linear Optimization Problems、以下 LP) である。シンプルなこの最適化問題は、1947年にアメリカの Dantzig によって提案されて以来、長らく「最適解を効率よく求めることができ、かつ広汎な応用のある問題」として認識されてきた。この LP のさまざまな拡張が連続最適化というひとつの分野を形成しているといつてよいだろう。そしてその拡張の方向は、従来次の2つに大別されてきた。①モデリングとしての汎用性・柔軟性を重視し、自由に非線形関数を用いる代わりに、最適解を求めることは困難なので局所的な解を求めることに焦点を絞る方向。②上記の最適解を求めることが困難な問題に対し、あえて最適解を求めることを目的とする方向 (大域的最適化)。これら2つの伝統的な拡張に対し、近年、③最適解を効率よく求めることができる範囲で、問題を LP から非線形へ拡張する方向、の研究が盛んになってきている。以下でこの3つの方向の現在について述べる。なお、用語でわからないものがあり、より詳しく知りたい場合には OR 事典¹⁾が手近な情報源である。

①の方向は、ニュートン法や逐次2次計画などを含む最も伝統的・正統的な連続最適化分野である。50年を超える歴史の中で、最適性条件の理論、ラグランジュ関数の理論など、さまざまな理論が整備され、また、さまざまな求解アルゴリズムの提案が行われて来た。しかし、近年、データの大規模化とモデリング技術の発達に伴い、次々と新しいタイプの問題が出て来ており、それらに対する研究が望まれていると共に行なわれている。特に大規模データによる大規模連続最適化問題の出現は、2次微分を保持することが不可能なことから、一時期性能の面から廃れていた共役勾配法やそれに類する1次微分のみを用いる手法が復権している。また、計算を安定させるために正則化項を追加させるヒューリスティクスなどが提案され、実際の計算に用いられている。

②の方向は、本当は必要とされているのに従来ずっと不可能とされてきた分野で、近年の計算機能力の向上に従いやっと一部で可能となってきた。分枝限定法とヒューリスティクスなどを組み合わせて解かれることが多い。この分野には有力な基礎理論がこれまで存在しなかったが、制約や目的に使われる関数がすべて多項式である「多項式最適化問題」の場合には、近年③の方向の技術を用いたエレガントな解法がフランスおよびアメリカで相次いで提案され、活発に研究されている。

③の方向は「凸計画」と呼ばれる最適化問題が基本である。凸計画は最適化問題が効率的に解けるために必要な中心的な概念であり、それにまつわる理論は数学的にも「凸解析」として展開されている。特に近年、凸計画の中でも、変数をベクトルから実対称行列へと拡張した「半正定値計画問題 (Semidefinite Program、以下 SDP)」とその仲

間が大きな流れを形成している。SDPに関する理論的研究は1990年代に整備され、内点法というアルゴリズムにより効率的に求解が可能であることが知られている。内点法はもともとLPに対するアルゴリズムで、1984年にATTベル研究所のKarmarkarによりその有効性が提案された。その後の発展では日本の研究者も決定的な役割を果たし、世界的に見てもトップレベルの研究を行っている。そのひとつの例証として、日本人を中心とする研究グループが1992年に米国OR学会のLanchester賞を授賞している²⁾。

SDPに関しては、現在信頼できるソルバーも手に入るようになり、応用に関する研究が進展している段階である。SDPの応用は多岐にわたる。先に述べた多項式最適化に対する応用の他、制御、グラフ理論、確率モデル、センサ位置同定問題、ロバスト最適化など、現在も次々に新たな応用が切り開かれている。また理論的にも、SDPのさらなる拡張として、錐線形計画問題が考えられ、これに対するさまざまなアルゴリズムが開発途上にある。

(4) 科学技術的・政策的課題

(3)でも述べたが、近年の情報爆発に対応するため、大規模データに対する最適化の必要性がますます高まっている。このため、1次微分のみを用いる最適化手法が重要性を増してきている。特に近年、この分野で理論的に新たな結果がいくつか得られており、大規模な最適化問題が次々と解かれるようになってきている。一方、単に大規模であるだけでなく、関数の微分の計算が不可能な場合や目的関数が確率的に変化するような問題が実際に現れ、求解が困難であることが知られている。これらの新しいタイプの最適化問題に対する効率的なアルゴリズムの構築が待たれている。

凸計画は1970年にはその基礎理論が整備されていたにもかかわらず、現在もなお理論的に新しい展開がなされている。近年の計算機能力の向上のおかげで、以前は理論のみであったものが実際に計算できるようになってきており、注目を浴びている。凸計画の分野の新しい最適化技術であるSDPについては、まだ広く深く知られているとはいえないが、今後の発展が期待できる。ただし、応用が広がるにつれて大規模な問題を安定的に解く必要が増しているにもかかわらず、そのための数値計算技術はいまだ成熟していない。特にソルバーの不安定性は深刻な問題で、現在、多くの商用ソフトウェアでSDPの解法をサポートしていないのは、これを克服できないためと思われる。応用に関する研究を進めるとともに、数値計算の技術に関しても研究が必要である。

連続最適化の重要な点は関係する分野とのインタープレイである。制御、ゲーム理論、機械学習、微分方程式論などとのからみで、突然流行することがある。近年の例でいえば、機械学習におけるサポートベクターマシン³⁾、非負行列分解、信号処理におけるcompressed sensing (圧縮センシング; CS)⁴⁾の流行があった。これらは、特に連続最適化の技術として新しい話ではないが、新しい応用が見つかったために脚光が当たったものと言える。このように、連続最適化という分野はいつ重要になるかわからない技術が詰め込まれている。近隣分野との交流を増やし、そのような発見がなされる機会を増やすことが特に重要である。

(5) 注目動向 (新たな知見や新技術の創出、大規模プロジェクトの動向など)

SDP の仲間であるがより容易である 2 次錐最適化問題に関しては、近年、求解アルゴリズムの商用ソフトウェアへの搭載が進んでいる (例えば、Gurobi Optimizer⁵⁾ や IBM CPLEX⁶⁾ など)。

これらのソフトウェアは数値的にも安定して、大規模な問題や整数制約にも対応している。このため、2 次錐最適化問題の応用が急激に広がりつつある。

連続最適化問題が何らかの意味で疎性をもつ場合に、それを利用して大規模問題をより小さな問題へ変換する技術が、かなり一般的な枠組みで論じられるようになった。現実の多くの問題は疎性をもつと考えられており、この方面の理論は、これからまだ発展する可能性がある。

現在、連続最適化分野の研究者のソフトウェア開発では、MATLAB (アメリカに本社をおく Mathworks 社所有の数値計算言語) が定番になりつつある。多くの最適化ソフトウェアは MATLAB で実装され、そうでない場合にも MATLAB インターフェースをもっていることが多い。

商用の最適化ソフトウェアとしては、Gurobi⁵⁾、IBM CPLEX⁶⁾、FICO Xpress⁷⁾ が有名である。どれも米国の会社である (ただし、CPLEX はもともとの開発はフランスの ILOG 社であったが 2009 年に IBM により買収された)。日本では、(株)NTT データ数理システムが Numerical Optimizer⁸⁾ というソフトウェアを自社開発している。NUOPT は、デンマークで作成されている Mosek⁹⁾ とともに、SDP を解法として取り入れている数少ない商用最適化ソフトウェアである。

3 年に一度開催される連続最適化の国際会議 ICCOPT が、東工大の水野真治教授を実行委員長として 2016 年に東京で開催されることが決定した。開催場所は六本木の政策研究大学院大学である。日本での最適化の大きな国際会議としては、1988 年の数理計画シンポジウム (ISMP) 以来、28 年ぶりの開催となる。ISMP のときには、多くの研究者が海外から集まり、そのときの若手研究者 / 学生らが大きな刺激を受けてこの分野に飛び込んで来て、その後の日本のプレゼンスを高めることになった。ICCOPT においても、これはずみに、より多くの若手研究者がこの分野に参入することが期待されている。

(6) キーワード

半正定値計画、2 次錐計画、錐線形計画、凸計画、大域的最適化、多項式計画、大規模データ、均衡条件つき最適化問題、微分不可能最適化問題

(7) 国際比較

国・地域	フェーズ	現状	トレンド	各国の状況、評価の際に参考にした根拠など
日本	基礎研究	○	→	<ul style="list-style-type: none"> 日本の大学・公的機関における基礎研究レベルは、個々の研究者の研究レベルは高いものが多いが、層の厚みで米国や欧州には見劣りがする。例えば有力ジャーナルの Editorial Board に入っている日本人の数は非常に少ない。 九州大学のマスフォアインダストリ研究所が有望な若手研究者を集めている。離散最適化の研究者も同じ研究所で集めており、ここがこれから日本の最適化研究の中心となる可能性がある。
	応用研究・開発	○	→	<ul style="list-style-type: none"> 世界に発信しているものもあるが、全体に層が薄い。 SDPAプロジェクト¹⁰⁾は日本が世界に発信している数少ない最適化ソフトウェアのひとつである。 制度的な理由で、欧米のように大学教員が最適化コンサルタントのような副業を行なうことが難しい。このため、大学教員が企業の最先端技術に触れたり、そこで最適化問題を掘り起こしたりする機会が限られている。
	産業化	△	→	<ul style="list-style-type: none"> 最適化そのものを明示的に扱う企業は少ない。各企業で独自に最適化に関する情報収集を行い、工夫を行なっているのが実情である。 サラリーマン社長の多い日本では、企業経営において論理的・数学的な判断を参考にする風土が薄いように思われる。最適化を用いたイノベーションは常にアメリカ・ヨーロッパからもたらされている。
米国	基礎研究	◎	↗	<ul style="list-style-type: none"> 米国の大学・公的機関における基礎研究レベルは非常に高く、ほとんどの分野で世界をリードしている。 Stanford大学のYe教授、Cornell大学のTodd、Reneger両教授、Georgia TechのMonteiro教授らが、自ら研究するとともに強力な若手研究者を輩出している。 有力大学に限らず、さまざまな大学に優秀な研究者がおり、層が厚い。 一流ジャーナルの Editorial board はほとんど米国・欧米で占められている。
	応用研究・開発	◎	↗	<ul style="list-style-type: none"> 研究がすぐに応用・開発・起業につながる環境がある。 特に主要な商用ソフトウェア (IBM CPLEX, Gurobi, FICO Xpress) は米国で開発されている。IBMは強力に開発を推し進めているが、他のソフトウェアもほぼ同等の性能を保持している。激しい競争がレベルを高くしている。 大学の教授が積極的に企業の最適化コンサルタントを行い、それにより先端技術を広めるとともに新たな最適化問題/分野の掘り起こしに努めているのが強みである。
	産業化	◎	↗	<ul style="list-style-type: none"> 企業活動において判断する場合に、最適化という観点を入れることにためらいがないため、最適化技術がさまざまな場面で徹底的に使われている。 INFORMS¹¹⁾ (アメリカのオペレーションズ・リサーチに関する学会; 会員数1万人以上) のサイトを見ると、あらゆる場面で最適化技術が使われていることがわかる。 電力供給の自由化に伴う需給予測および対応など、重要な社会インフラに対しても最適化技術が使われている。
欧州	基礎研究	◎	↗	<ul style="list-style-type: none"> オランダは内点法に関する研究が盛んで、その方面の人材もたくさん輩出している。 近年盛んに研究されている多項式計画に関しては、フランス、LAASのLasserre教授 (2009年のLagrange賞受賞者) が創始者の一人である。Lasserre教授は代数幾何的数学技術の最適化への応用を提唱し、オランダのチームとともに研究が活発に行われている。 デンマークでも、CORE (Center for Operations Research and Econometrics) が基礎的分野で一流の成果を出している。
	応用研究・開発	◎	↗	<ul style="list-style-type: none"> ドイツのZIB (Zuse Institute Berlin) では高性能最適化ソフトウェアの開発を行っている。 YALMIP¹²⁾ というフリーの最適化ソフトウェア環境を作成するプロジェクトが成功しつつある。
	産業化	◎	↗	<ul style="list-style-type: none"> 米国と同様、企業における最適化技術のトータルな応用・適用が行われている。 商用ソフトウェアも、米国ほどの厚みはないが、2次錐最適化のソルバーとして名を馳せたMOSEK、非線形計画ソルバーのLancelotなど、独自のソフトウェアが生産されている。

研究開発領域
最適化区分

中国	基礎研究	○	↗	<ul style="list-style-type: none"> 近年、中国からの大量の論文が投稿されている傾向がある。まだレベルの高いものは多くないが、かなりの人数が研究を行っており、これから伸びる可能性がある。 優秀な中国人研究者がたくさん米国に在住している。彼らが帰国するとき、劇的に教育・研究のレベルが上がることは予想される。また、これらの研究者の中にはジャーナルの Editorial board に入ったり学会活動で中心的な役割をしている人も多く、日本より存在感がある。
	応用研究・開発	△	→	<ul style="list-style-type: none"> 未だソフトウェアの開発などでは存在感を示せていない。 国際学会を主催したり、Open access の学術雑誌を創刊したりするなど、この分野への投資はかなり行なっている。
	産業化	△	→	<ul style="list-style-type: none"> 市場が大きいこと、経済活動が地質学的に広範囲にわたっていることから、最適化技術の産業化に本格的に取り組むと効果は大きいものと考えられる。しかしそのような段階には至ったとははっきり認識できていない。
韓国	基礎研究	△	→	<ul style="list-style-type: none"> 連続最適化に関する研究は盛んではない。
	応用研究・開発	×	→	<ul style="list-style-type: none"> 特に存在感がない。
	産業化	-	-	-

(註1) フェーズ

基礎研究フェーズ：大学・国研などでの基礎研究のレベル

応用研究・開発フェーズ：研究・技術開発（プロトタイプの開発含む）のレベル

産業化フェーズ：量産技術・製品展開力のレベル

(註2) 現状

※我が国の現状を基準にした相対評価ではなく、絶対評価である。

◎：他国に比べて顕著な活動・成果が見えている、○：ある程度の活動・成果が見えている、

△：他国に比べて顕著な活動・成果が見えていない、×：特筆すべき活動・成果が見えていない

(註3) トレンド

↗：上昇傾向、→：現状維持、↘：下降傾向

(8) 引用資料

- (社) 日本 OR 学会 OR 事典編集委員会 “OR 事典 Wiki”
<http://www.orsj.or.jp/~wiki/wiki/index.php> メインページ
- Institute for Operations Research and the Management Science. “Frederick W. Lanchester Prize”
<http://www.informs.org/Recognize-Excellence/INFORMS-Prizes-Awards/Frederick-W.-Lanchester-Prize>, 小島政和、Nimrod Megiddo、水野真治、野間俊人、吉瀬章子が受賞(1992年)
- 栗田多喜夫. “サポートベクターマシン入門”.
<http://home.hiroshima-u.ac.jp/tkurita/lecture/svm/index.html>
- Candès, Emmanuel. “Compressive Sampling”. Proceedings of the Int. Congress of Mathematicians, Madrid, Spain, 2006, European Mathematical Society. vol. 3, p. 1433-1452.
<http://www-stat.stanford.edu/~candes/papers/CompressiveSampling.pdf>
- Gurobi Optimization, Inc. “Gurobi Optimizer 5.6 Overview”.
<http://www.gurobi.com/products/gurobi-optimizer/gurobi-overview>
- IBM, “IBM CPLEX Optimizer”.
<http://www-01.ibm.com/software/commerce/optimization/cplex-optimizer/>
- FICO, “FICO Xpress Optimization Suite”.
<http://www.fico.com/en/products/fico-xpress-optimization-suite/>

- 8) NTT データ数理システム株式会社, “数理計画パッケージ Numerical Optimizer”
<http://www.msi.co.jp/nuopt/>
- 9) MOSEK, “MOSEK”.
<http://www.mosek.com>
- 10) SDPA Project. “SDPA (Semidefinite Programming Algorithms) Official Page”.
<http://sdpa.sourceforge.net>
- 11) Institute for Operations Research and the Management Sciences. “informs online”
<http://www.informs.org/>
- 12) “YALMIP Wiki”.
<http://users.isy.liu.se/johanl/yalmip/pmwiki.php?n=Main.HomePage>

3.3.3 離散的最適化

(1) 研究開発領域名

離散的最適化

(2) 研究開発領域の簡潔な説明

最適化の問題設定には、主として、離散的な構造を対象とする離散最適化と連続変数を対象とする連続最適化とがある。両者の特性に応じて、必要とされる手法はおのずと異なる。離散最適化は、整数変数を扱う整数計画法とグラフやネットワークに代表される離散構造を扱う組合せ最適化に大きく分けられる。在庫管理と輸送を一体化したサプライ・チェーン・マネジメント（SCM）、ネットワーク型インフラの整備と運用、超大規模集積回路の設計、スケジューリングなど、本質的に離散的な構造を有する最適化問題は、現代社会の至る所に存在している。特に、限られた資源を有効に利用するためには、離散最適化技術の深化と積極的な利用が望まれる。

離散最適化問題の多くは、問題の規模を表す入力サイズに対して、指数関数的に増大する選択肢の中から最適のものを選び出すことを目的としている。このとき、すべての可能性を列挙しようとしたのでは、現実的な時間内に計算が終了し得ない。特によい性質を有する組合せ最適化問題においては、その構造を利用して、入力サイズの多項式オーダーの計算量で厳密解を見いだす多項式時間解法が知られている。一方、実務上重要な離散最適化問題の多くには、そのような多項式時間解法は存在し得ないと信じられており、その前提を認めた上で、離散最適化問題を実際に解くためのさまざまな試みがなされている。

(3) 研究開発領域の詳細な説明と国内外の動向

離散最適化問題には、その構造を利用して効率的に解くことのできる問題と、そうではなくて、効率的な厳密解法は原理的に期待し得ないと信じられている問題とがある。前者の代表例として、最短路問題、最小木問題、最大流問題などがあげられる。これらは、いずれもネットワーク上で定義された最適化問題であり、その構造が詳細に理解されているとともに、計算機科学・情報科学関連の学科を中心に、その解法も広く教育されている。これらの最適化問題に対して、今日では、大規模ネットワークにおいても瞬時に最適解を計算することができる。ただし、教科書に載っているような手法のままではなく、大規模ネットワークに対応した工夫が必要となる点には注意を要する。

一方、実務上重要な多くの最適化問題は、むしろ、NP 困難と呼ばれる後者の部類に属している。ただし、NP 困難性は、あくまでも最悪ケースの計算量に関連して、多項式時間解法の存在を否定する状況証拠を提示しているに過ぎない。この種の問題に対する現実的な対処法としては、並列計算を含めて計算機資源を投入するとともに計算の過程を工夫することによって最適解を得ようとする厳密解法、局所探索を基礎とした反復計算法によって現実的な時間内に近似解を得る汎用解法を目指すメタヒューリスティクス、精度保証のある近似解を多項式時間で見いだす近似アルゴリズムなど、さまざまなアプローチによる研究がなされている。

効率的に解くことのできる離散最適化問題に関する研究としては、個々の問題に対す

る解法の高速化の他に、効率的に解ける仕組みを把握し、できるだけ一般的な枠組みにおいて効率的なアルゴリズムを設計する手法の研究も重要である。特に、マトロイドや劣モジュラ関数の重要性が J. Edmonds によって指摘されて以来、これらの概念を用いて記述される最適化問題の研究が盛んになされてきた。マトロイドは、ベクトル集合の線形独立性の概念の組合せ的な抽象化として 1935 年に Whitney によって導入された。導入の動機は、このように応用とは全く無関係なものであったが、1960 年代になって、組合せ最適化アルゴリズムとの関連が指摘された。劣モジュラ関数は、凸関数の離散版に当たる集合関数で、マトロイドの階数関数やネットワークのカット容量関数を含んでおり、効率的に解くことのできる離散最適化問題の多くが何らかの形で劣モジュラ関数に関係しているとさえいわれている。マトロイド最適化、劣モジュラ最適化やその拡張に当たる離散凸解析に関しては、わが国の研究者による本質的な貢献が続き、分野の発展を牽引している。

一方、1990 年代以降、アメリカ合衆国を中心に、NP 困難な組合せ最適化問題に対する精度保証付きの近似アルゴリズムの研究が盛んになされるようになった。この種の取り組みの萌芽はすでに 1970 年代に見られるが、1980 年代の組合せ多面体論と連続最適化の研究成果を受けて、より洗練された形で近似アルゴリズムを設計する手法が導入されたのが、この時代の特徴であった。特に、ネットワーク最適化問題や施設配置問題に対する線形計画法を用いた主双対近似アルゴリズムや Goemans, Williamson (1995) による最大カット問題に対する半正定値計画法に基づく近似アルゴリズムが、大きなインパクトを与えた。また、PCP 定理など、計算複雑度の理論研究の進展の結果として、離散最適化問題の近似困難性、すなわち多項式時間近似アルゴリズムの性能限界を保証する理論も整備された。近似アルゴリズムに関しては、STOC/FOCS/SODA といった計算機科学の国際会議を主な舞台に膨大な数の論文が発表されたが、わが国からの本質的な貢献は決して多くはなかったといわざるを得ない。

近似アルゴリズムに関する理論的な研究成果の実際上の有効性については、議論の余地がある。通常解析では、最悪ケースに着目して近似比を算定するため、一般的な感覚と較べて、緩い近似比となる傾向がある。最小化問題に対して、最適解の α 倍以下の目的関数値が得られる近似アルゴリズムは、 α 近似アルゴリズムと呼ばれる。近似アルゴリズムの設計に携わる研究者の感覚では、 α として問題のサイズに依存しない定数が採用できるものは、相当によいアルゴリズムであり、例えば、 $\alpha=2$ が保証できる離散最適化問題は稀少である。しかし、実務家の感覚としては、最適解の 2 倍が保証されただけでは、そのまま使う気にはなれないであろう。もちろん、理論的な結果として近似比 2 が保証されたアルゴリズムでも、出力として得られる近似解の目的関数値が最適値にかなり近い値が出される可能性はある。このような実際上の現象に関しては、近似アルゴリズムの実験的解析が報告されるとともに、経験則が集団の中で共有されていくことが重要である。

離散最適化問題の多くは、整数変数に関する線形制約条件の下で線形目的関数を最適化する整数計画問題の形に定式化できる。整数計画問題全般を対象に厳密解を計算する汎用的なアルゴリズムの研究は、1960 年の Gomory による切除平面法の提案以来、長年にわたって続けられてきた。分枝限定法、分枝切除平面法といった手法が提案され、

改良を重ねることによって、今日では、かなりの規模の整数計画問題まで現実的な時間内で解くことのできる商用ソフトウェアも普及している。わが国では、多くの研究者が1970年代に整数計画法に取り組んだが、当時の計算機の性能に基づいて、その有用性に疑問を感じて撤退した。一方、欧米では、さまざまな批判を受けながらも、整数計画法の研究を継続した集団があり、その努力が近年になって実を結んでいる。以上のような状況を受けて、わが国でも何人かの若手研究者が整数計画法の研究と普及に積極的に取り組んでいるが、まだ世界的な認知を得るには至っていない。

離散最適化関連の国際会議として、1990年以来、3年に2回のペースでIPCOが開催されている。ここでは、計算機科学の国際会議と同様に、投稿された論文の中から発表されるものを選んで、毎回、120件ほどの投稿があり、30件余りを選抜している。論文のテーマは、整数計画法、組合せ最適化、近似アルゴリズムなど多岐にわたる。わが国からの投稿で採択されているものは、ほとんどが組合せ最適化に関するものであり、これまでのところでは、整数計画法に関する論文は出ていない。

（４）科学技術的・政策的課題

整数計画問題が解けるようになってきた結果、研究の中心は、混合整数計画や非線形整数計画に移行している。これは、離散的最適化と連続的最適化との融合領域に当たる。伝統的に、連続系最適化の分野に強く、双方を包含した共通のコミュニティを擁しているわが国にとっては有利な状況にある。非線形整数計画の高性能ソルバーの開発を目標に、整数計画法、離散凸解析、連続最適化の研究者を糾合したチームを編成して研究活動を推進することは有効であろう。

（５）注目動向（新たな知見や新技術の創出、大規模プロジェクトの動向など）

2011年は、巡回セールスマン問題に対する近似アルゴリズムの設計が注目を集めた。巡回セールスマン問題は一般にNP困難であるが、各辺の移動距離が三角不等式に従うという自然な仮定の下で、近似比 $3/2$ の近似アルゴリズムが1976年にChristofidesによって提案された。それ以来、近似比 $4/3$ のアルゴリズムが存在するのではないかと予想されているにもかかわらず、これを凌駕する結果は得られていなかった。2010年12月にOveis Gharen, Saberi（アメリカ合衆国）、Singh（カナダ）によって、グラフ的な巡回セールスマン問題に対して $3/2$ よりもわずかによい近似比の近似アルゴリズムが発表されたのを皮切りに、研究が活性化され、4月にはスウェーデンのMönke, Svenssonが同じ問題に対する全く異なるアプローチで、近似比が大きく改善されることを示した。8月には、ポーランドのMuchaがMönke, Svenssonのアルゴリズムの解析を改良し、その近似比が $13/9$ となることを示した。さらに、2012年1月には、Sebó（フランス）、Vygen（ドイツ）が近似比 $7/5$ のアルゴリズムを発表している。この種の改良がまだ続いていくのか、グラフ的とは限らない場合にも拡張可能なのか、多くの研究者が注目している。

巡回セールスマン問題の様な組合せ最適化問題は、実行可能解の特性ベクトルと呼ばれる0-1ベクトルの集合の凸包における線形最適化という形で定式化できる。多くの場合、この凸包の形が非常に複雑となり、線形不等式制約で記述するには、入力サイズの

指数オーダーの制約式を必要とする。これに対して、より高次元の空間において、その射影が実行可能解の特性ベクトルの凸包を与えるような多面体上での線形最適化に帰着するというアプローチが考えられる。特に、高次元空間における多面体が、入力サイズの多項式オーダーの情報で記述できれば、多項式時間解法が得られることになる。このような高次元空間における定式化は拡張定式化（extended formulation）と呼ばれている。Yannakakis (1991)が、対称性を保持したままでは、巡回セールスマン問題やマッチング問題の拡張定式化が指数オーダーの不等式制約を必要とすることを明らかにした。2012年に、Firoiri等は、通信複雑度の概念を用いて、対称性を仮定しない形でも巡回セールスマン問題の拡張定式化が指数オーダーの線形不等式を必要とすることを示した。この結果は、巡回セールスマン問題の本質的な難しさを組合せ多面体論の観点から明らかにしたという面で非常に注目された。さらに2014年には、Rothvoßがマッチング多面体の拡張定式化が指数オーダーの線形不等式を必要とすることを示している。マッチング問題に対しては、Edmondsによる多項式時間解法が知られているので、この結果は、拡張定式化によるアプローチの限界を示したものとみることができる。

現実社会における最適化では、将来の入力に関する情報のないままに逐次的に決定を行うオンライン最適化も重要である。オンライン最適化アルゴリズムの性能は、入力がすべて与えられた場合の最適値との比の最悪値を意味する競合比を用いて解析するのが古典的である。しかし、競合比は、実際の性能よりも悲観的な結果を導く傾向があるため、入力に確率分布を仮定した上で期待競合比を解析することも一般的である。オンライン最適化のアルゴリズム設計は、オフライン最適化に対する近似アルゴリズムの設計手法のみならず、学習理論や確率的最適化の影響も受けて発展している。さらに、近年では、過去の入力に関する記憶を保持せずに処理を行うストリーム・アルゴリズムの研究が注目されている。

（6）キーワード

組合せ最適化、マトロイド、劣モジュラ関数、近似アルゴリズム、半正定値計画法、メタヒューリスティクス、整数計画法、分枝限定法、切除平面法、混合整数計画法、拡張定式化、NP困難、オンライン最適化

（7）国際比較

国・地域	フェーズ	現状	トレンド	各国の状況、評価の際に参考にした根拠など
日本	基礎研究	○	↗	<ul style="list-style-type: none"> 組合せ最適化分野では健闘しているが、近似アルゴリズムや整数計画法に関しては、欧米先進国の後塵を拝している。学術雑誌や国際会議における論文の採択状況にそれが反映されている¹⁾。 組合せ最適化の若手研究者を中心に、レベルの高い論文が発表される傾向にある。
	応用研究・開発	○	→	<ul style="list-style-type: none"> 企業に就職して活躍する博士課程修了者は依然として少ない。
	産業化	○	→	<ul style="list-style-type: none"> スケジューリング、生産計画、配送計画において、多くの適用事例が知られている²⁾。 メタヒューリスティクスを含んだ最適化パッケージも作成、販売されている³⁾。

米国	基礎研究	◎	→	<ul style="list-style-type: none"> MITをはじめとする拠点大学で、世界中から集まった優秀な大学院生が学位を取得している。特に、Carnegie Mellon大学とGeorgia工科大学では、1990年代から、‘Algorithms, Combinatorics, and Optimization’ というタイトルの博士課程プログラムがあり、計算機科学、離散数学、最適化のバランスのとれたカリキュラムを提供することによって、離散最適化分野で多くの優秀な研究者を輩出してきた^{4, 5)}。
	応用研究・開発	◎	→	<ul style="list-style-type: none"> IBM、Microsoft、Yahoo!、Google といった企業が、離散最適化・計算機科学の分野の学位取得者の主要な就職先になっている。その中には、世界的に広く知られた研究者も少なくない。
	産業化	◎	↗	<ul style="list-style-type: none"> スケジューリング、生産計画、配送計画といったオペレーションズ・リサーチの伝統的な適用分野だけでなく、検索連動広告のように離散最適化技法が決定的な要素となる新たなビジネスモデルが出てくる。
欧州	基礎研究	◎	→	<ul style="list-style-type: none"> 各国に研究拠点があり、互いに連絡を取り合っ、サマースクールや研究会を実施し、研究レベルの向上に努めている。 ハンガリーでは、組合せ最適化の研究グループが、非常に高い水準の研究を継続的に進めており、若手研究者の育成にも成功している。わが国の研究者集団と長年にわたって研究交流を続けてきた。最近では、両国の研究者の間で、共同研究も盛んに行われるようになっている⁶⁾。 ドイツでは、整数計画法の研究者を中心に離散最適化の研究者が多く、充実している。 オランダでは、国内に複数の研究拠がある上に、それらが互いに近いという利点を活かして、オペレーションズ・リサーチ関連の博士課程における教育プログラムを全大学共通で行っている。これによって、教員の負担を増やすことなく大学院レベルの教育水準を向上させている。 フランスでは、CNRSの施設を利用して、定期的に招待者のみが参加する国際研究会を開催して、情報交換と研究レベルの向上に努めている。
	応用研究・開発	○	↗	<ul style="list-style-type: none"> ドイツでは、数学の工学的応用を推進するプロジェクトMATHEONが推進され、産業界の諸問題に数学者が取り組む体制が整ってきた⁷⁾。
	産業化	○	↗	<ul style="list-style-type: none"> EUでは、鉄道輸送の合理化に最適化の研究者が積極的に関与し、成果をあげている⁸⁾。
中国	基礎研究	△	→	<ul style="list-style-type: none"> 香港のLap Chi Lau以外には、世界的に知られた離散最適化の研究者はいない。 北京の清華大学にAndrew Yaoを所長とする理論計算機科学の研究所が設立された。今後の発展が期待されるが、必ずしも離散最適化に重点的に取り組んでいるわけではない⁹⁾。
	応用研究・開発	△	→	<ul style="list-style-type: none"> 応用研究・開発の動きについては不明。
	産業化	△	→	<ul style="list-style-type: none"> 産業化の動きについては不明。
韓国	基礎研究	△	→	<ul style="list-style-type: none"> 計算機科学、離散数学では優れた研究者がいるが、離散最適化分野で世界的に知られた研究者はいない。
	応用研究・開発	△	→	<ul style="list-style-type: none"> 応用研究・開発の動きについては不明。
	産業化	△	→	<ul style="list-style-type: none"> 産業化の動きについては不明。

(註1) フェーズ

基礎研究フェーズ：大学・国研などでの基礎研究のレベル

応用研究・開発フェーズ：研究・技術開発（プロトタイプの開発含む）のレベル

産業化フェーズ：量産技術・製品展開力のレベル

(註2) 現状

※我が国の現状を基準にした相対評価ではなく、絶対評価である。

◎：他国に比べて顕著な活動・成果が見えている、○：ある程度の活動・成果が見えている、

△：他国に比べて顕著な活動・成果が見えていない、×：特筆すべき活動・成果が見えていない

(註3) トレンド

↗：上昇傾向、→：現状維持、↘：下降傾向

（8）引用資料

- 1) “IPCO : Integer Programming & Combinatorial Optimization”.
<http://www.mathopt.org/?nav=ipco>
- 2) （社）日本 OR 学会 OR 事典編集委員会. “ORWiki 事例編”.
<http://www.orsj.or.jp/~wiki/wiki/index.php/事例編>
- 3) ㈱数理システム. “NUOPT の機能仕様”.
<http://www.msi.co.jp/nuopt/products/spec.html>
- 4) Carnegie Mellon Univ. “ACO program”. <http://aco.math.cmu.edu/>
- 5) School of Mathematics, Georgia Institute of Technology. “Georgia Tech's Ph.D. Program in Algorithms, Combinatorics, and Optimization”.
<http://www.aco.gatech.edu/>
- 6) “Egerváry Research Group on Combinatorial Optimization (EGRES)”.
<http://www.cs.elte.hu/egres/>
- 7) “DFG Research Center MATHEON”.
<http://www.matheon.de/>
- 8) “ARRIVAL ; Algorithms for Robust and online Railway optimization: Improving the Validity and reliability of Large scale systems”. <http://arrival.cti.gr/>
- 9) 清華大学. “ITCS : Institute for Theoretical Computer Science”.
<http://iiis.tsinghua.edu.cn/en/itcs/>

3.3.4 最適化計算

(1) 研究開発領域名

最適化計算

(2) 研究開発領域の簡潔な説明

実社会における大規模かつ複雑で緊急性の高い諸問題に対して最適化手法の適用を行い、最新の計算技術を駆使した大規模計算によって解決するための研究開発。

(3) 研究開発領域の詳細な説明と国内外の動向

1940年代後半にいわゆるオペレーションズ・リサーチの分野において最適化問題の研究が開始されてから、産業政策や企業経営などの幅広い分野において適用が行われ、欧米先進国を中心に多くの成功事例が紹介されている。ここでいう最適化問題とは主に以下の2つに分類することができる。

- ・数理計画問題（線形計画問題、整数計画問題、半正定値計画問題など）
- ・組合せ最適化問題（特にグラフ、ネットワーク系の最適化問題）

最近の国内外の情勢から最適化問題の適用が必要とされる分野には以下のように新しい分野が加わり、物理的な範囲においても以前のように一企業や一国におけるレベルから、地球的な規模に拡大しつつある。

- ・大規模災害などで突発的に発生してリアルタイムに状況が変化し早急な解決が望まれる問題（防災計画策定、交通・災害復興・避難・ロジスティクス）
- ・資源やエネルギーの確保や生成および省エネルギー化や最適供給に関する研究（交通制御、資源探索、エネルギー供給、ライフラインの基盤計画、スマートグリッドなど）
- ・社会公共政策や企業経営などのため大規模データの有効活用（疫病の拡散、人口の増減、経済動向などの分析、生命科学系（創薬、遺伝子）、ビジネス系（金融、データマイニング、機械学習）、安全保障分野（組織構成の解明、事件事故の事前予測））

これらの諸問題は大規模かつ複雑で緊急性が高い問題が多いことから、問題解決（具体的かつ現実的な対応）のためには以下に示すような新しい最適化計算の研究開発が必要という認識が欧米および日本などの先進国では共有されつつある。上記のような諸問題に対してまずデータ収集や分析および数理的にモデル化を行った後に、最適化理論を実装してソフトウェア化を行い計算機上で解決する手法（いわゆる最適化計算）は幅広い分野で用いられ多くの成功を収めてきた。この手法での3つの要素（データ + 最適化理論 + 計算）が必要かつ不可欠である。データは現実の問題を表すものであり、一般的にはデータの収集や解釈も困難な場合が多く大規模な現実問題では扱うべきデータ量は非常に巨大になることが多い。また最適化理論は扱う問題を厳密な数学的問題へとモデル化し、解決する手法を与える役目を果たす。さらに計算は数理モデルおよびその解決手法を、現実のデータと結びつけ実際の問題を解決する役割を担っている。

最適化計算の根幹をなすこれら3つの要素は、オペレーションズ・リサーチの誕生から多くの研究者の継続的な努力と研究により、飛躍的に発展してきた。データに関して

は、収集技術および集積技術の向上により、超大規模データを扱うことが可能となった。最適化理論に関しても、コンピュータサイエンスや数学などの分野との融合を経て多大な進歩を見せている。そして、計算力に関しては計算機自体の性能の向上および実装方法の工夫や並列化などにより、現在では大規模な問題に対しても超高速で安定な計算が可能となった。よって、最先端理論（Algorithm Theory）+大規模実データ（Practice）+最新計算技術（Computation）による超大規模最適化問題の解決を目指し、特に米国やドイツなどの欧米先進国では分野横断型のさまざまなプロジェクトが開始されている。また日本でも最先端理論や高性能計算技術（いわゆる HPC）など個別の分野では大きな成果をあげており、欧米型の問題ごとに理論からアルゴリズム、データ収集、ソフトウェア実装それに大規模計算までの研究者が集結、融合を目的とするプロジェクトが開始されている。その他のアジア諸国（中国、台湾、韓国、シンガポールなど）でも日本と同様かあるいは日本よりもやや遅れている状況にあるといえる。

（４）科学技術的・政策的課題

（4-1）科学技術的課題

- ・（３）で述べたような実社会で要求される大規模最適化問題を解決するためには、短時間に膨大な計算量とデータ量を処理するための新技術が必要となる。例えば近年の日本は地震、津波、台風、洪水など大規模災害に何回も襲われており、大規模災害時には防災計画の策定、災害時の避難と誘導および情報収集と解析、復興計画の策定、スマートグリッドによる高度かつ安定な電力供給などを行う必要があるといわれている。このように大規模災害などで突発的に発生してリアルタイムに状況が変化し早急な解決が望まれ、かつ非常に計算量やデータ量などの規模が大きく従来の手法では処理が困難な性質をもつ実問題においては、大規模ネットワークの探索とクラスタリングの高速処理技術の開発が必須となる。
- ・現在では大規模な計算基盤としてペタスケールスーパーコンピュータ（スパコン）が用いられている。2015年頃にポストペタスケールスパコン、さらに2018年から20年頃にエクサスケールスパコンの登場を目指して、日本、米国、欧州、中国などで研究開発が行われている。しかし、現在の最適化理論とソフトウェア実装方法ではこれらの次世代スパコン上で数千万規模の並列性を備え、ストレージの階層性が深化したポストペタスケールシステム上でのスケーラブルな実行は困難であり、アルゴリズム、システムソフトウェアと同時並行的な解決が求められている。そのため理論的性能限界などからボトルネック箇所を特定、数値演算能力とメモリバンドなどのトレードオフ関係を把握、計算量とデータ移動量の正確な推定、疎性やサイズなどのデータ特性と性能値の見極めなどに関する研究開発が推進され、大きな成果を挙げつつある。

（4-2）政策的課題

- ・実際には最適化、HPC、防災、生命科学などの複数分野の連携は政治的、予算的な要因からも困難な場合が多く、日本だけでなく各国においても現時点においては連携が有機的に行われている事例は少ない。
- ・特に日本の教育機関においては内容が特定の分野に特化しやすく、最適化計算分野において活躍できる人材育成のシステムの確立が進んでいない。

(5) 注目動向 (新たな知見や新技術の創出、大規模プロジェクトの動向など)

(5-1) 日本

・現在、JSTによる以下の研究事業が推進されている。

1. 2011年度開始：JST CREST 領域「ポストペタスケール高性能計算に資するシステムソフトウェア技術の創出」¹⁾
2. 2013年度開始：JST CREST・さきがけ複合領域「ビッグデータ統合利活用のための次世代基盤技術の創出・体系化」²⁾
3. 2014年度開始：JST CREST 領域「現代の数理科学と連携するモデリング手法の構築」、さきがけ領域「社会的課題の解決に向けた数学と諸分野の協働」³⁾

これらの領域では最先端の数理アルゴリズムの探求から超大規模データ処理システムソフトウェアなどに関する実用性を見据えた研究開発が対象とされており、大規模最適化問題を高性能なアルゴリズムを用いて次世代スパコンで解く際に必要な新技術が多く算出されていくことが期待できる。上記の1のJST CREST チームが2014年6月に京コンピュータを用いてグラフビッグデータの処理のベンチマークで世界1位になっている¹⁾。

(5-2) 米国

・DIMACS Challenge⁴⁾: DIMACS (Center for Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science)はラトガーズ大学やプリンストン大学などが共同で設置している離散数学と理論計算機科学の研究所である。以下のように定期的に代表的な最適化問題を選択して、実問題を解くためのアルゴリズム実装に関するコンテスト(DIMACS Challenge)を行っている。

1. 1990-1991: Network Flows and Matching
2. 1992-1992: NP-Hard Problems: Max Clique, Graph Coloring, and SAT
3. 1993-1994: Parallel Algorithms for Combinatorial Problems
4. 1994-1995: Computational Biology: Fragment Assembly and Genome Rearrangement
5. 1995-1996: Priority Queues, Dictionaries, and Multidimensional Point Sets
6. 1998-1998: Near Neighbor Searches
7. 2000-2000: Semidefinite and Related Optimization Problems
8. 2001-2001: The Traveling Salesman Problem
9. 2005-2005: The Shortest Path Problem
10. 2011-2012: Graph Partitioning and Graph Clustering
11. 2013-2014: Steiner Tree Problems

・ジョージア工科大学⁵⁾ではIndustrial Engineering分野だけで100人を超える博士課程の学生が在籍しており、博士課程の学生たちによる最適化関連のソフトウェア開発も盛んに行われている。整数計画法、巡回セールスマン問題の解法に関する基礎理論から応用、さらには米企業との共同研究が極めて活発に行われている。

・最適化を含めたオペレーションズ・リサーチ分野の諸問題を解決するためのオープンソースソフトウェアの開発と公開を行うCOIN-ORプロジェクト⁶⁾が推進されている。これに関連してAIMMS MOPTA Modeling Competition⁷⁾という最適化問題のモデリ

ングを競うための競技会が毎年開催されて（今年のテーマはスマートグリッドにおけるスケジューリング）結果発表も例年リーハイ大学で行われている。

- ・グリッドおよびクラウド関係で有名な広域分散用のソフトウェアであるウイスコンシン大学で開発された CONDOR Grid⁸⁾を利用した最適化ソルバーの開発が活発に行われている。
- ・アルゴン国立研究所では、世界中で開発されている最適化問題用のソルバーを集めて、無料のオンラインサービスである NEOS サーバー⁹⁾の運用を行っている。ユーザは最新の最適化ソフトウェアの動向を知るだけでなく、それらを無料で利用することによってソフトウェア導入前の評価を行うことも可能となっている。

(5-3) 欧州

- ・ドイツの国立研究所 ZIB¹⁰⁾では“Fast Algorithms - Fast Computers”をモットーに最適化理論などの基礎研究からソフトウェア開発、さらに産業界や政府系機関との深い連携が行われており、最適化計算の観点では世界的にも非常に高いレベルにある。
- ・さらに DFG(German Research Foundation)のプロジェクト Matheon¹¹⁾が注目を集めている。Matheon では数学関係の教育を行うだけでなく、数学を応用して具体的なアプリケーションを解く研究（ソフトウェア開発を含む）が活発に行われている。また、DFG のアルゴリズム工¹²⁾も、基礎研究から企業までをつなげる重要な役目を負っている。

(5-4) 中国

中国人民解放軍国防科学技術大学(NUDT)¹³⁾は世界最速のスーパーコンピュータ天河2号を保有して、大規模なグラフ探索に関するソフトウェアの開発などを行っている。

(6) キーワード

最適化問題、グラフ解析、大規模データ、コンピュータサイエンス、HPC

（7）国際比較

国・地域	フェーズ	現状	トレンド	各国の状況、評価の際に参考にした根拠など
日本	基礎研究	◎	→	<ul style="list-style-type: none"> 日本の大学や研究機関の基礎研究のレベルは総じて高く、いくつかの分野（数理計画問題に対するアルゴリズムと大規模計算など）では世界のトップレベルを誇っているが、研究者の層が欧米各国と比較して厚いとはいえ、全体的には上昇傾向にあるとはいえない。
	応用研究・開発	◎	↑	<ul style="list-style-type: none"> これまでの日本では、この分野の応用研究は軽視される傾向にあったが、近年の複雑かつ大規模な諸問題の解決のために、応用研究も重視する傾向に変化しつつあり、財政的な支援や組織づくりが始まっている。 エネルギーや環境問題、災害対策などが非常に注目されており、今後はこれらの分野での最適化計算手法の適用が期待されている。
	産業化	○	↑	<ul style="list-style-type: none"> 日本の製造業は高機能素材系などの分野で依然として世界トップレベルの基礎技術と生産能力を有しているが、今後はこれらの分野に対する適用も期待できる。
米国	基礎研究	◎	↑	<ul style="list-style-type: none"> 米国の大学や研究機関での基礎研究のレベルは高く、多くの分野で世界のトップレベルを誇っている。特に最適化理論、モデリング言語、特に整数計画問題などのソフトウェア、さらにスパコン上での長時間の大規模安定計算などの分野では非常に強いとされている。 世界中から広く人材を集めることによって、高い研究のレベルを維持しているが、経済や財政危機によって、今後の基礎研究費の減額などによる負の影響が心配されている。
	応用研究・開発	◎	↑	<ul style="list-style-type: none"> 基礎研究の強みを生かした形で応用研究・開発も非常に進んでおり、欧州と同様にアプリケーションを中心に各分野の研究者が集結する形でプロジェクトが推進されている。 大規模最適化問題に対して、最新のアルゴリズムとスパコン上の大規模計算による解決という手段が重要視されている。
	産業化	◎	↑	<ul style="list-style-type: none"> 理科系や技術系出身の経営者も多く、積極的に新しい技術を産業界に導入すべきという方針に関するコンセンサスが得られており、他国よりも先駆けて研究成果が製品化されることが多い。
欧州	基礎研究	◎	↑	<ul style="list-style-type: none"> 米国と同様にこの分野の基礎研究には長い伝統と層の厚さを兼ね備えており、EU内のドイツ、イタリア、フランス、オランダやスイスなどに限らず、米国、日本、南米とも非常に活発な人材交流を行っている。 特にドイツなどでは組合せ最適化や数理計画問題の基礎理論から、ソフトウェア開発それにスパコン上での大規模計算まで非常にバランスと連携が取れた形での研究が推進されている。 米国と同様に経済や財政危機から今後の基礎研究費の減額が心配されている。
	応用研究・開発	◎	↑	<ul style="list-style-type: none"> 基礎研究から産業までのつながりが非常によく、教育、研究だけでなく、具体的なアプリケーションを解く、つまりアプリケーションを中心に各分野の研究者が集結する形で応用研究・開発が行われており、最適化ソフトウェアの作成が非常に重視されている。
	産業化	◎	↑	<ul style="list-style-type: none"> 政府や公共団体さらに企業などとの連携によって交通政策、金融、エネルギー、製造業、環境、農業、情報通信、医療などの分野に積極的に最適化問題を適用して、大規模計算によって解決する試みが積極的に推進されており、今後の進展に大きな期待がされている。
中国	基礎研究	○	↑	<ul style="list-style-type: none"> 中国国内の研究機関では最適化計算などの分野に関して積極的に欧米および日本の研究機関との交流や共同研究を指向する動きが見られる。 近年、欧米や日本などの大学に多くの優秀な留学生を関連する分野（数学、最適化、コンピュータサイエンス、HPC）に送り込むとともに、人材の呼び戻し政策を積極的に行っているため今後の研究水準は飛躍的に向上することも期待できる。
	応用研究・開発	○	↑	<ul style="list-style-type: none"> 現時点では独自技術と呼べるものは少ないが、スーパーコンピュータで過去世界1位になるなど、大規模計算分野においても基礎研究を応用した形での成果は確実に増えてきている。 中国国内ではエネルギーや交通、環境問題などが経済成長とともに深刻化しており、これらの諸問題の解決のために、最適化計算などの新しい問題解決の手法が重要視される傾向が高まっている。

	産業化	○	↗	・基礎研究や応用研究・開発の高まりに合わせて幅広い産業分野での最適化計算技術の適用と成果が期待されている。
韓国	基礎研究	△	→	・数学理論を含めた最適化およびHPC系などの研究者の層はあまり厚いとはいえず、国際的にも他国ほどの存在感を示すまでには達していない。
	応用研究・開発	△	→	・世界的な規模をもつ製造業では設計や製造分野において、最適化問題の適用と大規模計算による解決を積極的に導入しようというプロジェクトが開始されているが、業績悪化などであまり進んでいない。
	産業化	△	→	・他国と比較して顕著な産業化への努力が見えていないとはいえないが、韓国の現政権は数学を技術として産業移転することに高い関心をもっている。

(註1) フェーズ

基礎研究フェーズ：大学・国研などでの基礎研究のレベル

応用研究・開発フェーズ：研究・技術開発（プロトタイプの開発含む）のレベル

産業化フェーズ：量産技術・製品展開力のレベル

(註2) 現状

※我が国の現状を基準にした相対評価ではなく、絶対評価である。

◎：他国に比べて顕著な活動・成果が見えている、○：ある程度の活動・成果が見えている、

△：他国に比べて顕著な活動・成果が見えていない、×：特筆すべき活動・成果が見えていない

(註3) トレンド

↗：上昇傾向、→：現状維持、↘：下降傾向

(8) 引用資料

- 1) JST CREST 研究領域「ポストペタスケール高性能計算に資するシステムソフトウェア技術の創出」、<http://www.postpeta.jst.go.jp/>
- 2) JST CREST・さきがけ複合領域「ビッグデータ統合利活用のための次世代基盤技術の創出・体系化」、
http://www.jst.go.jp/kisoken/crest/research_area/ongoing/bunyah25-6.html
- 3) JST CREST 領域「現代の数理科学と連携するモデリング手法の構築」、さきがけ領域「社会的課題の解決に向けた数学と諸分野の協働」、
http://www.jst.go.jp/kisoken/presto/research_area/ongoing/109mathcollabo.html
- 4) DIMACS ホームページ、<http://dimacs.rutgers.edu/dimacs2.html>
- 5) ジョージア工科大学リサーチラボ、
<http://www.isye.gatech.edu/research/labs-centers-groups/>
- 6) COIN-OR ホームページ、<http://www.coin-or.org/>
- 7) AIMMS MOPTA Modeling Competition ,
<http://www.aimms.com/community/modeling-competitions/mopta-2012>
- 8) CONDOR ホームページ、<http://www.condor.com/us/index.jsp>
- 9) NEOS サーバーホームページ、<http://www.neos-server.org/neos/>
- 10) ドイツ ZIB 国立研究所、<http://www.zib.de/en/home.html>
- 11) ドイツ Matheon プロジェクト、<http://www.matheon.de/>
- 12) DFG のアルゴリズム工学、<http://www.algorithm-engineering.de/index.php?lang=en>
- 13) 中国人民解放軍国防科学技術大学、<http://english.nudt.edu.cn/>

3.3.5 最適化モデリング

(1) 研究開発領域名

最適化モデリング

(2) 研究開発領域の簡潔な説明

潜在的な評価尺度や制約をも意識した最適化モデリング技術とそれと連動するアプローチの研究。

(3) 研究開発領域の詳細な説明と国内外の動向

最適化は、モデリングとアルゴリズム、そしてそれらを支える理論から構成される。最適化モデリングは、現実のシステムなどの設計、運用、制御、予測などに役立つ知見を得るために、現象を数理的に表現し、理論に基づいて（最適化アルゴリズムを利用するなどして）数値的な解を提供できるようにするものである。つまり、最適化におけるモデリングとは、問題を抱える意思決定者に、枝葉を取り除いた本質的な構造を提示して問題把握を支援するだけでなく、その先にある「問題を解くこと」を大きな目標としていることが特徴である。

一方、解くことを強く意識するせいで、定式化のことをモデル化、モデリングと述べている場合も見られる。定式化を支援するものとしてモデリング言語が挙げられるが、数理的モデルを効率的に記述するもの¹⁾であり、ここでは、モデリングと定式化は類義語であるとして、モデリングの方がもっと広い意味を持つとしておく。もう少し詳しくいうと、モデリング（もしくはモデル）とは、本来、意思決定を助けるものであるので、必ずしも数式を使うべきというものではない。しかし、モデリングは抽象化であり、最適化においては数値解を得る目的もあることから、その抽象化が数学的・数理的につながっている、という関係が存在するわけである²⁾。

また、近年では、最適化アルゴリズム、実装、そして、計算環境の著しい進歩に伴い、うまく定式化できれば、Cplex³⁾、Gurobi⁴⁾、Scip⁵⁾、Xpress⁶⁾、Numerical Optimizer⁷⁾といった汎用ソルバーを利用し、これまでには「最適解を得ることが困難、実行可能解を得ることも難しい」とされてきた問題ですら、現実的な時間で解ける場合も多くなった。つまり「うまく定式化する」ことも当然だが、その前にどのようにモデリングしたか、どのように問題を捉えたかが、真の問題解決に最も大きく関わるようになってきた。言い換えれば、解く技術が著しい発展を遂げたために、最適化モデリングの重要性が際立ってきたといえる。

2013年の報告書に詳しく述べたが、国内外を含め、最適化モデリングでよく使われる方法（テクニック）を3つ簡単に挙げておく⁸⁾。

- ① 対象を既知の構造⁹⁾にあてはめて、線形計画法、動的計画法、分枝限定法など実績のあるアルゴリズムの力を発揮させる余地を拡大する
- ② 計算量を減らすために、扱う対象の構造をいかして問題を分割¹⁰⁾する
- ③ 意思決定の粒度を考慮し、問題を階層化する

一方、これらの工夫を行っても、扱いが難しいのが、問題の目的をどう捉えるかである。定式化の際の目的関数の設定が難しいということにもつながる。

目指すものが、金額に変換できるようなコストの最小化、もしくは物理的な量や利益の最大化であり、意思決定の対象が物理的実体に結びつくような場合には、比較的自然的な形で捉えることができる。早く移動したい、早く作業を終わらせたい、移動距離を少なくしたい、利用車両数を少なくしたい等である。しかし、人間の評価尺度（好ましさや不満度）を含む問題は、それ自体を数値化することが難しく、さらに複数の要素の組合せについては、その尺度の足し算で表せるわけではない。さらには、意思決定者が、潜在的に考えている評価尺度はモデリングにおいて表現されることがなく、不満の残る解を与えることも少なくない。こういった状況は、複数の人間が働く現場での人員配置やスケジューリングで起こりやすく、優れた最適化アルゴリズムが開発されても、なかなか現場に浸透しないという現実がある。

また、国内外の研究を見渡すと、論文タイトルに「人の好み（preference）を考慮した」とつけられたものも多くみられるが、好ましくないものを禁止しているだけ、設定した目標に到達しない度合いに重みをつけて足し合わせた（線形の）目的関数が設定されているだけの場合がほとんどである。

古くから、多目的計画、ゴールプログラミングについての研究¹¹⁾があり、評価尺度の扱いに対する問題提起はされていたものの、現在の最適化アルゴリズムの進歩を十分にいかせるモデリングの研究、逆に、最適化アルゴリズムで作りに出した情報を利用した上での最適化モデリングの研究がまだ存在しないのが現状である。

一方、最適化技術をだれでもどんな現場でも利用できるようになるには、扱いにくい評価尺度、複数の目的（目標）、潜在的な評価尺度や制約をも意識した最適化モデリングの研究が必須であるといえる。

（４）科学技術的・政策的課題

（３）で挙げた３つの方法において、重要な視点と課題を整理しておく。

①の「既知の構造にあてはめる」については、「緩和」の視点が重要である。枝葉を落とすこと（緩和すること）ことで、問題構造がシンプルに表現でき、十分研究されたモデルに落とし込むことができれば、非常に効率がよい。妥当な解を与える限り、問題把握のためにも、効率よく解くためにも、できるだけシンプルに緩和できるのがよい。しかし、解きやすさ（都合の良さ）を優先するため、問題にとって本質的な部分を無視することになってしまう危険については常に意識するべきである。また、逆に、重要度の低いものから緩和すればよいというわけでもない。重要度の高い制約をハード制約、できれば考慮したい制約をソフト制約とし、ハード制約を真の制約として、ソフト制約を満たさなかった度合いを目的関数で最小化することも論文でよくみられるが、問題によってはこれが逆効果の場合もある。１つの車が、同じ時刻に違う場所でそれぞれ配達業務を行うといった、物理的に起こりえない状況を禁止することをハード制約としておくことには全く問題ないが、起こりうる状況の好ましさ（好ましくない度合い）で、ハード制約とソフト制約に分けることが、結果的に受け入れられない解を与える場合がある。例えば、人間がもつ評価尺度（その制約を満たさなかった場合のペナルティ）が数値的に表せないだけでなく、満たせない制約の組合せによって解の評価が全く異なる問題では、１つ１つはそれほど重要な制約に見えなくても、人間にしか適切な緩和ができない

場合が多い。よって、重要な制約を多少緩和した解を与え、その重要な制約を満たせるよう、数値的に扱いづらい制約を意思決定者が1つ1つ緩和して解を修正する方がずっと現実的で効率がよい場合が起こり得る。このように、一時的に重要な制約を緩和しても、「緩和したことを陽に意識しておく」ことにより、人間に「適切な緩和」のチャンスを与えるだけでなく、新しいアプローチ方法の構につながると考える。しかし、それらを単に人間任せにするのではなく、数理的に最適化の視点で行う方法を構築することも重要であり、適切な緩和のために有益な情報提供やその情報の可視化といったことが、大きな課題の1つと考える。

②の「分割」については、制約群の中で、独立に扱いやすい部分を部分問題として捉え、意思決定の多くの部分に関わる結合制約（Linking Constraints）をいかに少なくするようにするかが重要である。分割では、結合制約を緩和することになるので、部分問題の中に結合制約を満たさない度合いを最小化するような仕組みを作っておく必要がある。また、どう分割するかについては（③の「階層化」もそうであるが）、多くの場合、意思決定者が経験と勘で行っているのが現状である。これに対し、制約間の関わりや強さから分割や階層化を行うため、場合によってはマイニング技術等も利用しながら、最適化の技術を駆使することも課題である。

以上をまとめると、最適化モデリングが抱える大きな課題は、目的関数の設定と解の提示方法にあると考える。最適化アルゴリズムやそれを利用できる環境が整う中、その適用分野が広がり、人間の評価尺度を持つ問題を無視することができない。その中で、暫定的に設定する目的関数がどうあるべきか、またそれが与えた解が唯一の最適解ではないことを十分理解し、それを囲むような良解空間や修正可能な空間を与える技術が切望されるなか、最適化モデリングは、意思決定過程において、これまでよりも広い領域を担っていくべきと考える。分割や階層化といった大きな構造を捉える際に必要な情報を提供できる仕組み作りも課題といえる。

（5）注目動向（新たな知見や新技術の創出、大規模プロジェクトの動向など）

暫定的に与えた目的関数が与えた解に対し、人間が持つ潜在的な制約条件や評価尺度を解に修正するためには、最適化モデルにおける最適解を1つ（もしくは少数）出力するだけでは不十分であり、最適解ではないが意思決定者が「あれもあり得た、これももあり得た」と思う（実行不可能解も含む）近似解を出力する必要がある¹²⁾。しかし、最適解の周辺にある膨大な数の近似解を単に列挙するだけではかえって混乱を招くことになりかねない。人間の意思決定過程を動的計画の考え方に対応させることにより、解空間をネットワークで表し¹³⁾、良解空間を絞り込むこと¹⁴⁾、そして、過去に蓄積された解の特徴をモデルに反映するために、統計的な技術を利用したり、機械学習¹⁵⁾との連動を実現したりする研究など、新しい動きもある。しかし、これらは、始まったばかりの（もしくは、これから始まろうとしている）活動であり、既存研究として成果を探すことが難しい。また、2013年の報告でも述べたが、個々のテーマごとにそれぞれのモデリングが提案されていても、最適化モデリング自体についての研究は、これまでに例がない。したがって、大規模なプロジェクトとなるのは今後の展開となる。

潜在的な評価尺度、つまり人間の暗黙知¹⁶⁾に対してロバスト性をもつ最適化の考え方、

最適化モデリングとアルゴリズムの関連の研究、そして変数・制約式の緩和を含めたモデルの変形に関する理論的な展開、解空間の可視化や良解の分布に対する情報提供を、誰でも利用できる技術が望まれているといえる。

（6）キーワード

潜在的評価尺度、納得、解空間、可視化、ネットワーク表現、緩和、修正、最適化アルゴリズム、列挙、統計、機械学習、マイニング

（7）国際比較（潜在的な評価尺度や制約をも意識した最適化モデリングに絞った評価）

国・地域	フェーズ	現状	トレンド	各国の状況、評価の際に参考にした根拠など
日本	基礎研究	△	→	・暗黙知を意識し、モデルの簡素化、可能良解の可視化、解の修正を支援する情報についても研究が始まっているもののまだ顕著な成果がでていない。 ・最適化モデリング自体の研究への意識があいかわらず薄い。 ・目的関数設定が比較的容易（明らか）な問題を扱った研究が多い。
	応用研究・開発	△	→	・明らかではない尺度を無視したままの研究も多い。
	産業化	△	→	・小規模な最適化問題を支援するシステムが数多く存在するにもかかわらず、最適化エンジンの利用はされないままであり、最適化モデリング研究の取り組みへの遅れが明らかである。
米国	基礎研究	△	→	・目的関数設定が比較的容易（明らか）な問題を扱った研究が多い。 ・応用研究上の意図と強く結びついた、特定の構造に対して深く掘り下げて追究する取り組みは多い。
	応用研究・開発	△	→	・明らかではない尺度を無視したままの研究も多いが、明らかでない尺度自体をもともと対象にしないという現実を反映しているとも考えられる。
	産業化	△	→	・人員配置などの小規模な最適化問題用のシステムも数多く存在するが、人間の評価尺度を重視しているかは不明である。
欧州	基礎研究	△	↗	・目的関数設定が比較的容易（明らか）な問題を扱った研究が多い。 ・応用研究上の意図と強く結びついた、特定の構造に対して深く掘り下げて追究する取り組みは多い。 ・Preference Learning の研究がある
	応用研究・開発	△	→	・明らかではない尺度を無視したままの研究も多いが、人間を中心とした最適化システムの開発もある。
	産業化	△	→	・人員配置などの小規模な最適化問題用のシステムは存在する
中国	基礎研究	×		
	応用研究・開発	×		
	産業化	×		
韓国	基礎研究	×		
	応用研究・開発	×		
	産業化	×		

（註1）フェーズ

基礎研究フェーズ：大学・国研などでの基礎研究のレベル

応用研究・開発フェーズ：研究・技術開発（プロトタイプの開発含む）のレベル

産業化フェーズ：量産技術・製品展開力のレベル

（註2）現状

※我が国の現状を基準にした相対評価ではなく、絶対評価である。

◎：他国に比べて顕著な活動・成果が見えている、○：ある程度の活動・成果が見えている、

△：他国に比べて顕著な活動・成果が見えていない、×：特筆すべき活動・成果が見えていない

（註3）トレンド

↗：上昇傾向、→：現状維持、↘：下降傾向

(8) 引用資料

- 1) 山下浩,他. 数理科学のためのモデリング言語 SIMPLE. コンピュータと教育研究会報告. 1995, vol.95, p.25-30.
- 2) 伊理正夫. モデリング. bit 臨時増刊. 1983, vol.15, p.898-903.
- 3) IBM,CPLEX Optimizer,
<http://www-01.ibm.com/software/commerce/optimization/cplex-optimizer/>
- 4) Gurobi Optimization, Gurobi Optimizer, <http://www.gurobi.com/>
- 5) Zuse Institute Berlin, SCIP Optimization, <http://scip.zib.de/>
- 6) FICO, Xpress Optimization,
<http://www.fico.com/en/products/fico-xpress-optimization-suite/>
- 7) NTT データ数理システム, Numerical Optimizer, <http://msi.co.jp/nuopt/>
- 8) 日本応用数理学会 監修/薩摩順吉・大石進一・杉原正顕 編, 応用数理ハンドブック, 朝倉書店, 2013.
- 9) 茨木俊秀. 「問題解決エンジン」群とモデリング. オペレーションズ・リサーチ. 2005, vol.50,p.229-232.
- 10) C.H. Papadimitriou, K. Steiglitz, Combinatorial Optimization: Algorithms and Complexity, Prentice Hall, 1982.
- 11) 田辺隆人, 他. 「納得」を生み出すスケジューリングアルゴリズムとソフトウェア 制約充足を超えて: 実行可能領域の直観的把握. スケジューリング・シンポジウム. 2009, p.169-173.
- 12) 中山弘隆. あれもこれもよくしたい多目的計画法. オペレーションズ・リサーチ.1996, vol.41, p.343-348.
- 13) Ahuja ,R.K.; Magnanti,T. L.; Orlin,J.B. Network Flows: Theory, Algorithms, and Applications. Prentice Hall. 1993.
- 14) 秋田博紀; 池上敦子. ナース・スケジューリングにおける部分問題実行可能解空間のネットワーク表現. 統計数理. 2013,vol.61, p.79-95.
- 15) J. Fürnkranz, E. Hüllermeier, Preference Learning, Springer, 2010.
- 16) マイケル・ボラニー (佐藤敬三訳), 暗黙知の次元: 言語から非言語へ, 紀伊國屋書店,1966.

3.3.6 最適化ソフトウェアと応用

(1) 研究開発領域名

最適化ソフトウェアと応用

(2) 研究開発領域の簡潔な説明

最適化技術の発展を多様な実務分野に役立てるためのソフトウェア開発および利用技術の研究。

(3) 研究開発領域の詳細な説明と国内外の動向

(3-1) 実務に役立てる3要素の役割と現状

最適化を実務に役立てるには3つの要素が必要である。ひとつは解決したい問題を最適化問題として記述するモデリング、つぎにモデリングされた最適化問題を解くアルゴリズム、さらに問題を具体的に記述するデータである。以下これらの要素に関する役割と現状を概括する。

①モデリング

定式化によって現実世界と最適化アルゴリズムの仲立ちをする技術であり、最適化アプローチを成り立たせる根源となっている要素である。例えば航空産業の分野¹⁾では古くから最適化を実務に応用しようとする努力の中から、大規模な問題を分割、あるいは階層化して扱いやすくする技術が生まれ、その成果が他分野に広まっている²⁾。しかしながら、モデリング技術は学問的に体系立って整理されているとはいえず、アルゴリズムに対して従属的な関係にとどまっている。その理由としてはモデリングには実務そのものと最適化技術の双方の知見を集約しなければならないため担い手が少ないこと、さらに、モデルとアルゴリズムを分離するソフトウェア技術である「モデリング言語」が比較的最近まで普及していなかったことが考えられる。

②アルゴリズム

モデリングされた問題に対して、具体的な解を求めるための技術である。Dantzigによる単体法というアルゴリズムの開発が、最適化技術の基礎となった。制約を満たしながら、特定の目的関数を最小化する解を求めるという問題は、変数が連続で関数が線形の場合には、線形代数、不等式論など古典的な数学が有用なアプローチを提供する。Dantzig以降も数十年にわたって、変数が一部離散的な場合、関数が非線形な場合、制約式が行列方程式の場合などに対応するアプローチが案出され、今日の最適化技術の理論的な礎となっている。アルゴリズムの所要時間や得られる解の「良さ」に理論的な裏づけがあることは、最適化技術を利用する実務家にとっても大きなメリットとなる。

しかしながら、理論的な解析の充実に比べてソフトウェアとしての実装は多くない。これはソフトウェアの動作がデータ構造の効率や計算機環境、選定するテスト問題などの「夾雑物」によって変動して見えてしまうために優劣の評価がつけにくく、アカデミックな業績評価に結びつけにくいという事情によると考えられる。

③データ

最適化は定量的な分析であることから、信頼のおける分析結果を出すためには解析対象に関する正確なデータが必要になる。1990年代前半までは、データの取得やメンテナ

ンスには非常に大きなコストが必要で、最適化アプリケーション導入における大きな障壁となっていた。ビジネス分野における IT 環境が整い、完全に整備されているとはいえないながらも大量のデータが蓄積している現在は当時と比べると、最適化の応用において状況は大幅に改善された。IT ビジネス界の昨今のトレンドである「ビジネスアナリティクス」「ビッグデータ」はこのような状況を背景として生まれている。機械学習アルゴリズムの文脈では、単純な学習モデルとアルゴリズムでもデータが潤沢にあればかつてないほどの汎化性能が実現されたという報告がある。

(3-2) 3要素に関連するソフトウェア技術

次に最適化を成り立たせている上記の要素と関連する重要なソフトウェア技術について記述する。

①汎用プログラミング言語 (⇒アルゴリズム)

例えば FORTRAN や C、C++が代表的な汎用言語である。最適化の黎明期には計算機に計算を行わせる手段として唯一取り得るものであった。90年代までは、信頼できる数値計算ライブラリの充実もあって、FORTRAN が最適化の分野では最もポピュラーな汎用言語であったが、現在では安価な処理系の充実に伴って C、C++に主流が移ってきている。

汎用プログラミング言語のみで最適化アプリケーションを実装するコストは大きい。FORTRAN や C は手続き指向の言語であるため、数式モデルそのものの表現や構造化されたデータのハンドリングに適しているとはいえない。一方で C++はオブジェクト指向言語であるが、計算の効率化とオブジェクト指向を両立させるために相応のテクニックが必要である。近年になって ruby や python などインタプリタによって実行できるスクリプト言語が最適化分野にも普及してきているが、アルゴリズムそのものの実装には用いられる例はあまり多くない。

②スプレッドシート (⇒データ)

Microsoft Excel に代表されるビジネスアプリケーションである。最適化の入出力である数値データをハンドリング・可視化することに長けており、最適化アプリケーションのインターフェースとして最も普及している。現在、ほぼすべての汎用最適化パッケージは何らかの形でスプレッドシート型のインターフェースを備えている。スプレッドシートの欠点はパターン化したデータでもサイズに比例して入力の手数が増えてしまうこと、抽象化した数式的な表現を直接記述することができないという点である。

③統計解析パッケージ (⇒データ)

SAS や SPSS、S-PLUS、R など、統計演算を数値的に行ったり、統計データを可視化したりするソフトウェアである。スプレッドシートと同様の機能をもつ他、データの管理をする機能やデータ処理用の言語を伴って提供されている。これらの言語に含まれているデータ処理用の言語は特に大規模データに関する処理を簡便に記述する上で操作性が良く、最適化との親和性が高い。そのため多くの統計解析パッケージが最適化ソフトウェアとのインターフェースをもつか、あるいは最適化ソフトウェアを内部に組み込んでおり、例えば金融工学モデルのパラメータ推定などに積極的に利用されている。

④モデリング言語 (⇒モデル)

AIMS、GAMS、AMPL、SIMPLE、OPL など、数式モデルとして最適化問題を簡便に記述するためのツールである。数式に現れる繰り返しパターンを簡素に記述する機能、大規模データをハンドリングする機能をもつ。最適化アルゴリズムの実装 (ソルバー) と協調動作させることを意図してつくられており、線形関数・二次関数の係数を行列として出力する、非線形関数の微係数を計算する、といった機能を有する。モデリング言語の登場において、当初最適化アプリケーションにおいて渾然一体となっていたモデル・データ・アルゴリズムをそれぞれ分離し、ニーズに応じて選択的に組み合わせる取り扱いが可能となった。ただ、モデリング言語は単体で完結するわけではなく、必ずデータとアルゴリズムを結合しなければならないという点で最適化のサービス側が利用するツールという位置づけにとどまる。

⑤高速コンピューティング技法 (⇒アルゴリズム)

最適化アルゴリズムの実行は一般に多大な計算コストを所要するため、各時代でのハードウェア・ソフトウェアの先端技術が投入されてきた。1990 年前半はベクトルコンピュータ、1990 年代後半は、高性能化したパーソナルコンピュータのキャッシュ性能の利用、2000 年代後半からのマルチコア環境による並列化、さらに最近になって流行している GPU を用いた並列化、といった技術が最適化計算に大きなインパクトを与えている。現在では 10 万円台で購入できるパソコンにおいて、数千万変数規模の線形計画法が現実的な時間で可能となっており、大規模計算が個人の環境で可能となっている。

⑥ソルバー (⇒アルゴリズム)

MINOS、CPLEX、Xpress-MP、Numerical Optimizer、Gurobi、IPOpt、SCIP、SDPA など学問的な成果を取り込む形で開発されたアルゴリズムの実装 (ソルバー) である。その一部は商用プロダクトとして保守され続けており、現在において (混合整数) 線形計画問題・凸な 2 次計画問題・制約充足問題に対しては安定かつ信頼できるソルバーが市場に出回っている。特に商用パッケージはほぼ例外なく、何らかのモデリング言語、あるいはスプレッドシートアプリケーションとのインターフェースをもつ。しかしながら、商用以外のプログラムも含めて考えるとき、ソルバープログラムが対象としているスコープや機能、性能は多種多様で、インターフェース、品質はさまざまである。ソルバーを実務的な問題解決のために選定して利用するにはアルゴリズムとソフトウェアに対する深い知識が必要となる。

⑦大規模ストレージ (⇒データ)

近年、急速に整備されつつある。ビジネス分野におけるデータがかつてない規模で蓄積し、具体的な意思決定への利用に向けた機運が高まっている。しかしながらデータから有益な情報を引き出すにはデータを選別・整理する技法を学ぶ必要があることに注意しなければならない。最適化に利用するためにはさらに、データの内容や量とモデル・アルゴリズムの整合を考慮する必要がある。現状において、大規模ストレージのデータはまだ集計や構造を持たない機械学習モデルに利用されるにとどまっており、蓄積した大規模データの最適化モデルへの利用は今後の課題である。

（４）科学技術的・政策的課題

前項までの記述において、最適化を支える構成要素とそれを支える技術について概観した。個々の技術は長い時間をかけて成熟の域に達しているともいえる。しかしながら、最適化ソフトウェアの応用は決して期待された通りに進んでいるとはいえない。それはなぜなのか考えられる理由を次に列挙することで、技術的・政策的な課題を明らかにする。

①「アルゴリズム」が多すぎる

最適化の研究の歴史は 50 年以上と長く、その成果としてアルゴリズムやその解析、実装プログラム（ソルバー）が多数蓄積されている。このことが分野の全体像を見えにくくしており、具体的な問題を解決しようとしている実務家（ユーザー）を混乱させている側面は否定できない。例えばウェブを調査すればアルゴリズムやソルバープログラムの名前や一覧などの情報は存在する。しかしソルバーの作り手、研究者、ソフトウェアベンダーがそれぞれの立場でアルゴリズムの分類をしており、アルゴリズムの呼び名についてもコンセンサスが取れていないので、専門外のユーザーに対して利用しやすい状況とはいえない。

②ニーズが合致しない

実務家が求めるのは実務上の問題解決であるが、研究者の目的や指向は必ずしも問題解決にあるとは限らない。研究として「面白い」問題は得てして非常に難しく、実務的に利用価値のあるアルゴリズムを構成することは難しい場合も多い。研究者は時間をかけても厳密解を出すことに意義を見いだすかもしれないが、実務家は「そこそこ」の実行可能解をあまり時間をかけずに求めることを指向するかもしれない。例えば企業と大学の共同研究の場でこのような不一致が顕在化してしまうと、双方にとって望ましくない結末を招く。

③コスト見積もりが難しい

特に組み合わせ問題では一見簡単に見える問題でも、一定以上の規模になると驚くほど難しい場合がある。また、実務家（ユーザー）にとっては自然な要請に起因する問題の改変が、よく知られた効率的なアルゴリズムを適用する上で致命的な影響をもたらす場合もある。

一般に最適化問題を解く前にどの程度の計算リソースを所要するかを見積もるのは困難なことが多く、大規模で非線形、あるいは離散的な問題の場合には、計算リソースの不足のために何ら有効な結果が得られない場合さえある。またユーザーが解をみるまでに制約の抜けなどのモデル化の不備に気づくことができない、といった現象がソフトウェアの開発フローを混乱させる。

このような背景のため、ソフトウェアプロジェクトに最適化技術を組み込むことは費用・工期の上で大きなリスク要因となり得る。リスクを軽減するためには、アルゴリズムとその実装、モデル化に対する深い知識と経験をもった人員の参加が必要になる。

④データの整備にコストがかかる

1990 年代までは実務分野において数量化されているデータを得ることの方が難しく、最適化までたどりつかないことは珍しくなかった。この状況は現在において大幅に改善されている。しかし最適化の前提となる精度のよいデータを整備した形で揃えるのに特

別な技術や人的コストを所要することは変わりなく、データはモデルやアルゴリズムよりもはるかに高価な要素であることは認識すべきである。モデルが最適化の要であるという立場では、データは従属的なものであるが、モデルに固執するあまり、常に新しいデータを必要とし、多大なコストをかけてデータを整備する結果を招くのでは最適化の応用は進まない。コスト面にも配慮して既存のデータをうまく利用できるようなモデルをデータに合わせこむというアプローチも考慮に入れてしかるべきである。

最適化ソフトウェアは、実務的な課題を出発点とし、モデル、データ、アルゴリズムを総合させて構成される。モデル、データ、アルゴリズム個々の技術についてはある程度の成熟はみているものの、モデル、データ、アルゴリズム相互の「刷り合わせ」において多くの問題が発生し得る。解消の方向性としては、次のような方策が適切であろうと考えられる。

⑤情報発信

最適化が適用されている問題は数多く、そのうちの一部は大きな効果をもたらしている。私企業の利益に貢献しているものは発表できにくいので広まりにくい、例えば学校の配置や道路や橋梁など社会インフラのメンテナンスなど、利害が対立する中で中立性を保ちながらリソース（予算）を配分するという、公共性の高いテーマにおける貢献を示すことで、関心呼び起こすことが期待できる。

⑥魅力的な教科書

アルゴリズムの数学的な側面よりも、応用事例に即した教科書があれば、最適化分野に参入する研究者やユーザーの増大に大きく貢献するであろう。現在ではスタンダードな最適化の教科書は理論的な側面を指向したものが多い。

⑦解の解釈機能の充実

最適化は数値を入力して数値を出力するため、ソフトウェアの入出力は数値の表など無味乾燥なものとならざるを得ない。アルゴリズムが返した結果を解釈して「意図」をくみ取って指し示す方法は開発されていないため、最適化技術のユーザーには「数字を読む」能力が必要となり、最適化技術を使いこなす上での障壁となっている。このような最適化の「解釈」に関する研究はあまり前例がないが、大きな成果をもたらす可能性がある。

⑧コンサルタントの育成

最適化の分野において専門的な知識をもつ職業的コンサルタントは極めて少ない。モデル、データ、アルゴリズム個別ではなく、相互の刷り合わせのノウハウをもつ人材を育成することによって、最適化の適用は大きく進むことが期待できる。

⑨アカデミックな研究領域の拡大

最適化ソフトウェアの成功にはモデル、データ、アルゴリズムの「刷り合わせ」技術が重要であることは認識されつつも、学問分野として認識されてはいない。アルゴリズムに適したモデル化技法、モデルの実務分野への見立て、ユーザーの意図を適切に汲み取るモデル化技法、アルゴリズムが利用する計算機資源の見積もり、マシンアーキテクチャを利用するアルゴリズムの実装などの課題を学問的に整備することで、最適化ソフトウェアの利用に伴うリスクを大幅に軽減できることが期待できる。

（５）注目動向（新たな知見や新技術の創出、大規模プロジェクトの動向など）

① ビジネスアナリティクスのトレンド

データの蓄積を背景に、IT 業界は「ビジネスインテリジェンス」というキーワードの下、集計・可視化を行うツールを開発し、浸透させた。次に IT 業界は「ビジネスインテリジェンス」の次の段階として、「ビッグデータ」に基づく「ビジネスアナリティクス」というキーワードを打ち出し、集計や可視化を超えた、意思決定や予測といった価値をデータから引き出すソフトウェアの開発と浸透に努力している。「ビジネスインテリジェンス」の具現化のひとつとして最適化ソフトウェアとその応用があることは間違いなく、その意味で最適化に対する社会的な期待は高まっている。

② 問題解決型指向

サービスサイエンス、ヘルスケア、Web マーケティングなどの分野では、特定の問題解決をテーマとして、さまざまなバックグラウンドをもつ研究者が集結して研究を進めている。このような動きの中から、異なる専門分野をもつ研究者同士の交流、横断的な知識をもつ人材が育成されることが期待できる。

③ 定量化できない分野の最適化

最適化技術はエネルギーコストの最小化など、解の「良さ」が明確に定量化できてしかも評価軸が少ない分野から出発したが、昨今では就業人口の減少や消費者の成熟を背景として、定量化が難しく多様な評価尺度が存在する人的スケジューリング・配送計画・積み付けなどの分野にも応用が進められようとしている。その中から、旧来のモデル・アルゴリズム（ソルバー）の弱点や改善ポイントの議論が始まっている³⁾。

④ 研究者による高性能汎用ソルバーの作成

わが国における、問題解決エンジンプロジェクト⁴⁾、SDPA（線形半正定値計画）⁵⁾、ドイツにおける SCIP（制約充足・混合整数計画法）⁶⁾のように、研究者が高性能な汎用ソルバーを開発、リリースする動きが見られる。これは最適化アルゴリズムそのもののみならず、高品質な実装を開発することが研究活動として認識されだしたことを示すと解釈できる。

⑤ モデル化不要の技術の台頭

最適化においてモデル化は必須の技術であるが、それが応用への障壁となってもいる。最近ではモデル化を簡素化する技術も台頭してきた。関数値の値のみから最適化を行う DFO（Derivative Free Optimization）はユーザーが最適化したい問題を数式で記述する必要はなく、プログラムをあくまで「ブラックボックス」として結合するのみで最適解を導出する技術である。また、機械学習アルゴリズムは判別分析モデルをデータから学習し、データが大量であればあるほど、モデル化の精度を向上させることができる。これらの技術は最適化の利用を普及させる上で意義深い。

（6）キーワード

詰め込み、ネットワーク設計、fleet スケジューリング、意思決定支援、判別分析、人的スケジューリング、施設配置、金融商品開発、広告最適化、ポートフォリオ最適化、モデルパラメータフィッティング、ロバスト最適化、CAE、設計最適化、生産スケジューリング、命令スケジューリング、VR、SAT、カッティングストック、運転計画、巡回セールスマン、石油化学プラント、設備計画、ロジスティクス、RCPSP、リコメンド、制御、保守計画、作付計画、品質管理

（7）国際比較

国・地域	フェーズ	現状	トレンド	各国の状況、評価の際に参考にした根拠など
日本	基礎研究	○	↗	・多くの研究者が参画している。
	応用研究・開発	○	↗	・汎用数理計画法ソルバーやモデリング言語の開発が行われている。
	産業化	△	↗	・米国・欧州にくらべて最適化モデルに関する一般的な理解は進んでおらず、普及の段階には達していない。 ・大規模システム開発において最適化は一般的なコンポーネントとして認知されていない。
米国	基礎研究	○	↗	・多くの研究者が参画している。
	応用研究・開発	○	↗	・多くの汎用ソフトウェアが開発されている。
	産業化	○	↗	・広い分野で応用事例の報告がある。 ・最適化モデルに関する一般的な理解が進んでいる。
欧州	基礎研究	○	↗	・多くの研究者が参画している。
	応用研究・開発	○	↗	・汎用数理計画法ソルバーやモデリング言語の開発が行われている。
	産業化	○	↗	・最適化モデルに関する一般的な理解が進んでいる。
中国	基礎研究	△	↗	・指導的立場の研究者は見ないが論文発表などはかなり多い。
	応用研究・開発	△	→	・潤沢な資金を背景に応用しようという機運は高まっている。
	産業化	△	→	・現在のところビジネス環境の制約が少ないためにまだビジネス分野でのニーズは多くないのだと考えられる。公的規制や事業が成熟して差別化を図ろうという意図が生まれたときに流行するのだと思われる。
韓国	基礎研究	×	→	・分野への参画は後発であり、指導的立場の研究者は見ない。
	応用研究・開発	×	不明	・不明。
	産業化	×	不明	・不明。

（註1）フェーズ

基礎研究フェーズ：大学・国研などでの基礎研究のレベル

応用研究・開発フェーズ：研究・技術開発（プロトタイプの開発含む）のレベル

産業化フェーズ：量産技術・製品展開力のレベル

（註2）現状

※我が国の現状を基準にした相対評価ではなく、絶対評価である。

◎：他国に比べて顕著な活動・成果が見えている、○：ある程度の活動・成果が見えている、

△：他国に比べて顕著な活動・成果が見えていない、×：特筆すべき活動・成果が見えていない

（註3）トレンド

↗：上昇傾向、→：現状維持、↘：下降傾向

(8) 引用資料

- 1) Marsten,R.E.; Muller,M.R.; Killion,C.L. Crew Planning at Flying Tiger: A Successful Application of Integer Programming, *Management Science*. 1975, vol.25,no.12, p.1175-1183.
- 2) Papadakos,N. Integrated Airline Scheduling. *Computers & OR*. 2009, vol.36, no.1, 2009, p.176-195.
- 3) 田辺隆人,岩永二郎,多田明功,池上敦子. 「納得」を生み出すスケジューリングアルゴリズムとソフトウェア制約充足を超えて: 実行可能領域の直観的把握. *スケジューリングシンポジウム*. 2009,p.169-173.
- 4) 茨木俊秀. 「問題解決エンジン」への道. *応用数理*. 2004, vol.14,no.1, p.67-70.
- 5) Yamashita, Makoto; Fujisawa, Katsuki; Fukuda, Mituhiro; Kobayashi, Kazuhiro; Nakta, Kazuhide; Nakata, Maho. Latest developments in the SDPA Family for solving large-scale SDPs. *Handbook on Semidefinite, Cone and Polynomial Optimization: Theory, Algorithms, Software and Applications*. edited by Anjos, Miguel F. ; Lasserre, Jean B. Springer. NY, USA, Chapter 24. 2011, p. 687-714.
- 6) Achterberg, Tobias. SCIP : Solving Constraint Integer Programs. *Mathematical Programming Computation*. 2009, vol. 1, No.1, p. 1-41, doi:10.1007/s12532-008-0001-1